

浙江大学

博士学位论文



论文题目 数字几何处理：理论与应用

作者姓名 周 昆

指导教师 石教英 教授

鲍虎军 研究员

学科(专业) 计算机应用

所在学院 计算机学院

提交日期 2002 年 6 月

Digital Geometry Processing: Theory and Applications

Zhou Kun

June, 2002.

Submitted to the graduate school of Zhejiang University
in partial fulfillment of the requirement
for the degree of Doctor of Philosophy.

State Key Lab of CAD&CG, Zhejiang University

Department of Computer Science and Technology, Zhejiang University

摘要

随着 3D 扫描技术的发展，三维网格模型正逐渐成为继声音、图像和视频之后的第四种多媒体数据类型。这种媒体在互联网、娱乐和制造等其它工业的日益广泛应用对数字几何处理算法提出了很高的要求。近十年来，研究者们提出了很多处理网格模型的算法，如去噪声、光顺造型、编辑、几何压缩、网格简化和表面纹理合成，来满足各种各样的应用需求。尽管这些算法很好地满足某种特定需求，我们仍然缺乏一种统一的，理论上完备的方法来解决所有这些问题。而在数字图像处理领域，Fourier 分析和快速 Fourier 变换则成为大多数数字图像处理应用的基础，它们能使各种应用在时间域和频率域之间自由切换。

数字几何处理存在两大挑战：首先，不象传统媒体是定义在平坦几何上函数的规则采样，3D 网格模型表面通常是任意弯曲、复杂并缺乏连续自然的参数化，因此无法直接采用 Fourier 分析；其次，网格模型通常包括顶点位置坐标、法向量、颜色、纹理坐标和 BRDF 等多种属性，这些属性都必须以一种统一的方式处理。尽管近年来数字几何处理研究取得很大的进展，基于子分网格和松弛算子的算法也取得了一些较好结果，数字几何处理仍然是计算机图形学领域的一个公开问题。本文的研究目标就是要为几何信号处理算法建立一个统一的，高效的框架。

本文提出了一个强壮的，能处理任意网格的几何信号处理框架。在该框架下，网格的所有属性都被当作定义在其表面上的几何信号。通过全局球面参数化算法，原始几何信号被转换为球面信号，该球面信号被自适应采样为具有和原始球面信号相同频谱的球面信号。然后，球面调和分析 and 快速球面调和变换被用来分析这些球面信号。这样，传统欧氏空间中的信号处理技术都可以被推广到定义在任意网格表面上的几何信号，很多数字几何信号处理应用都可以容易地在本文框架下实现。

总体上说，本文贡献如下：

- 通过结合局部参数化和累进网格技术，我们提出了一种快速、强壮的全局球面参数化算法。该算法运行一遍就能为累进网格表示中任意层次的网格模型生成球面参数化网格。
- 球面调和分析 and 快速球面调和变换被用来分析、合成球面几何信号。
- 通过分析参数化对几何信号频谱的影响，我们得到了频谱能量迁移论断，并设计了一种自适应采样算法来解决非均匀参数化带来的能量迁移问题。

- 本文还实现了包括几何信号滤波、细节和纹理传输、多分辨率编辑和网格变形在内的多个数字几何处理应用，并给出了大量的实验结果。
- 通过把球面参数化算法和自适应采样算法扩展到平面，我们可以采用传统图像压缩技术来压缩几何信号。

在介绍数字几何处理的一些背景知识和研究现状后，本文第二章概述了我们的数字几何处理框架；第三章和第四章详细介绍了本文框架中的两个核心技术：累进的全局球面参数化算法和保频谱的自适应采样算法；第五章介绍在本文框架下实现的一些几何信号处理应用，包括滤波和增强、细节和纹理传输、多分辨率编辑以及三维变形。第六章介绍了基于平面参数化的几何信号压缩算法；最后我们总结全文，并讨论一些将来的研究方向。

关键字：图形学、信号处理、数字几何处理、网格、参数化、多分辨率分析、调和分析、多细节层次、滤波、多分辨率编辑、网格变形、几何压缩。

Abstract

Benefited from the development of 3D scanning techniques, 3D mesh models are recently becoming a new type of medium after sound, images and video. Increasing use of this medium in Internet, entertainment and manufacturing industries, as well as many other areas, has raised great needs for digital processing algorithms. In the last decade, many algorithms such as denoising, smoothing, editing, geometric compression, simplification, morphing and texture synthesis were proposed to meet various application requirements. Although these algorithms work well for their specific purposes, it still lacks a unified, theoretically sound way to address all these problems. In contrast, the Fourier analysis and fast Fourier transforms, which make us move back and forth between the spatial domain and frequency domain, become the foundation of most image processing algorithms.

Two challenges exist for digital geometry processing. First, unlike traditional media with functions or regularly sampled signals defined on flat geometry, meshed surfaces are usually curved, irregular and lack continuous parameterizations, hence not ready to admit Fourier analysis. Second, meshes are normally associated with many attributes including position coordinates, normal, color, texture coordinates and BRDF etc., which should be processed in a unified way. Although researchers have made promising progresses recently and the algorithms based on subdivision meshes and relaxation operators can achieve some good results, digital geometry processing still remains an open problem in computer graphics community. Our goal is to establish a unified and efficient framework for geometric signal processing algorithms.

In this dissertation, we present a novel framework for processing signals over arbitrary meshes. Within this framework, all attributes of meshes are regarded as geometric signals defined on their surfaces. We transform the original geometric signals into spherical signals with the same spectra by adopting a global spherical parameterization and an adaptive sampling scheme. The spherical harmonic analysis and spherical harmonic transforms, the powerful analysis tools for directional data, are used to process spherical signals. In this way, traditional signal processing techniques in Euclidean setting can be extended to geometric signals defined over arbitrary mesh surfaces, many applications can be easily implemented under our framework.

Specifically, we make the following contributions:

- By incorporating local parameterization into the progressive mesh representation, we provide a robust and fast global spherical parameterization algorithm for arbitrary 2-manifold meshes. The algorithm generates a spherical parameterization for each level mesh of the PM after a single run.
- The spherical harmonic analysis and fast spherical harmonic transforms are introduced

to analyze and synthesize spherical geometric signals.

- By analyzing how parameterizations affect the spectra of signals, we reach the energy-shifting affirmation, and design an efficient adaptive sampling scheme to tackle the energy-shifting problem caused by non-uniform parameterizations.
- We show how to implement several applications under our framework, including filtering, detail and texture transfer, multi-resolution editing and mesh morphing, and we demonstrate a lot of experimental results.
- By generalizing our spherical parameterization algorithm and adaptive sampling scheme to the planar case, we can adopt image compression algorithms to compress geometric signals.

After introducing some backgrounds and the state of art of digital geometry processing, we overview the framework in Chapter 2; Chapter 3 and Chapter 4 describe the two key components of our framework: progressive spherical parameterization algorithm and adaptive sampling scheme; In Chapter 5, we describe several applications implemented under our framework, including filtering and enhancement, detail and texture transfer, multi-resolution editing and mesh morphing. Chapter 6 introduces our geometric signal compression algorithm based on planar parameterization. Finally, we conclude this dissertation and discuss some directions for future work.

Keywords: Graphics, Signal Processing, Digital Geometry Processing, Mesh, Parameterization, Multi-resolution Analysis, Harmonic Analysis, Levels of Detail, filtering, Multi-resolution Editing, Mesh Morphing, Geometry Compression.

目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第一章 绪论 | 1 |
| 1.1 走进数字化时代的三维几何..... | 1 |
| 1.2 三维几何数据表示..... | 2 |
| 1.3 数字几何处理的研究范畴和应用领域..... | 4 |
| 1.4 数字几何处理的困难和挑战..... | 5 |
| 1.5 数字几何处理的研究现状..... | 5 |
| 1.5.1 基于子分网格的 DGP 算法 | 6 |
| 1.5.2 基于松弛算子的 DGP 算法 | 12 |
| 1.5.3 几何图像 | 16 |
| 1.6 现有算法的优缺点分析..... | 18 |
| 1.7 本文工作..... | 19 |
| 第二章 统一的数字几何处理框架 | 21 |
| 2.1 基本定义..... | 21 |
| 2.1.1 三角形网格 | 21 |
| 2.1.2 几何信号..... | 22 |
| 2.1.3 同构映射和同形映射..... | 22 |
| 2.1.4 亏格..... | 22 |
| 2.2 框架概述..... | 23 |
| 2.2.1 球面参数化..... | 24 |
| 2.2.2 球面调和分析与快速球面调和变换..... | 25 |
| 2.2.3 采样与误差控制..... | 27 |
| 2.2.4 信号重建..... | 28 |
| 2.3 框架时间效率..... | 29 |
| 2.4 处理亏格非零的网格..... | 29 |
| 2.5 分析讨论..... | 30 |
| 2.6 小结..... | 32 |
| 第三章 累进的球面参数化算法 | 35 |

| | |
|----------------------------|----|
| 3.1 相关工作..... | 35 |
| 3.1.1 网格片的平面参数化..... | 35 |
| 3.1.2 基网格上的参数化..... | 36 |
| 3.1.3 球面参数化..... | 37 |
| 3.2 算法描述..... | 38 |
| 3.2.1 保面积的边折叠网格简化算法..... | 39 |
| 3.2.2 局部参数化算法..... | 41 |
| 3.2.3 累进球面参数化构造..... | 43 |
| 3.2.4 均匀球面参数化..... | 43 |
| 3.3 实验结果..... | 44 |
| 3.4 参数化的均匀性讨论..... | 46 |
| 3.5 小结..... | 47 |
| | |
| 第四章 保频谱的自适应采样算法..... | 49 |
| 4.1 问题的提出..... | 49 |
| 4.2 参数化对信号频谱的影响..... | 50 |
| 4.3 保频谱的自适应采样策略..... | 54 |
| 4.4 小结..... | 56 |
| | |
| 第五章 几何信号处理..... | 57 |
| 5.1 几何信号滤波与增强..... | 57 |
| 5.1.1 频域滤波..... | 57 |
| 5.1.2 卷积滤波..... | 62 |
| 5.1.3 信号增强..... | 63 |
| 5.2 细节与纹理传输..... | 64 |
| 5.3 多分辨率几何信号编辑..... | 66 |
| 5.3.1 算法描述..... | 67 |
| 5.3.2 算法实现..... | 68 |
| 5.4 可调度的 Fourier 网格变形..... | 68 |
| 5.4.1 特征对齐..... | 71 |
| 5.4.2 拓扑合并..... | 72 |
| 5.4.3 频谱插值..... | 73 |
| 5.4.4 实验结果..... | 74 |

| | |
|------------------------------|----|
| 5.5 小结..... | 74 |
| 第六章 几何信号压缩 | 77 |
| 6.1 相关工作..... | 77 |
| 6.2 几何信号压缩框架..... | 78 |
| 6.3 算法实现..... | 79 |
| 6.3.1 累进的平面参数化算法..... | 79 |
| 6.3.2 采样和误差度量..... | 80 |
| 6.3.3 JPEG2000 编码器和解码器 | 82 |
| 6.4 实验结果..... | 83 |
| 6.5 小结..... | 84 |
| 第七章 结束语 | 87 |
| 7.1 理论研究..... | 87 |
| 7.2 应用研究..... | 88 |
| 参考文献..... | 89 |
| 附录 1: 演示动画文件说明 | 97 |
| 附录 2: 撰写论文 | 99 |

第一章 绪论

三维几何作为一种新的数据媒体近 10 年来在工业界得到了广泛应用，这一趋势推动了学术界对数字几何处理（DGP: Digital Geometry Processing）的研究。顾名思义，数字几何处理即用计算机对三维几何数据进行处理，这门从 90 年代中后期发展起来的学科属于计算机图形学和数字信号处理的交叉学科。尽管近几年这一方向的研究取得了激动人心的进展，但与大家熟悉的数字图像处理和数处理等处理传统媒体的学科相比，数字几何处理还显得非常年轻。前者如数字图像处理已经发展得相当成熟，Fourier 分析和 FFT 构成了大多数图像处理应用的基础；而现有的数字几何处理研究成果还无法为大多数几何处理应用提供一个统一的、理论上完备的框架，还无法满足工业界日益增长的需求。正如一些学者指出的那样，数字几何处理还是计算机图形学研究领域的一个公开问题。

本文对数字几何处理进行了深入研究，提出了一个统一的数字几何处理框架。该框架以坚实的理论基础回答了上述公开问题，大量在该框架下实现的数字几何处理应用说明了框架的强壮性、实用性和通用性。

1.1 走进数字化时代的三维几何

上个世纪 70 年代以来，多媒体数据已经经历了 3 次革新：声音、图像和视频。从 90 年代中后期开始，我们又迎来了第 4 种数字化媒体——三维几何模型。

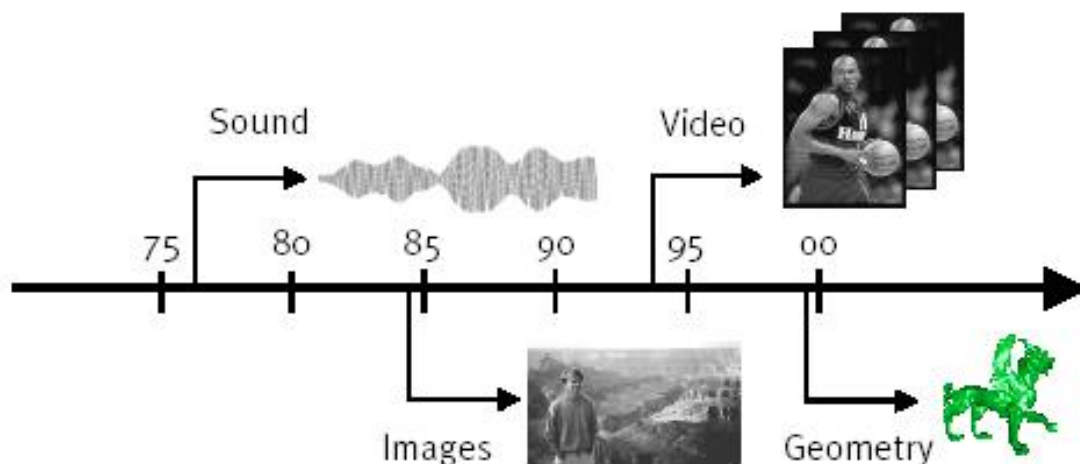


图 1.1 走进数字化时代的三维几何 [Sweldens2001]

每一次多媒体数据革新都是由不断增长的数据获取能力、计算机运算能力、存储能力和传输带宽的引发的。如图 1.1 所示，跟随着多媒体技术的发展历程，我们可以看到 70 年代数字声音，80 年代数字图像和 90 年代数字视频的出现和普及应用。每种新的多媒体数据都需要新的处理工具来支持，这就引发了大量关于数字信号处理的研究的出现。对每一种媒体的研究都产生了一门新的学科，如对研究图像的数字图像处理信号和研究视频的数字视频处理。比较典型的信号处理应用包括：去噪声、压缩、传输、增强、检测、分析以及编辑等等。

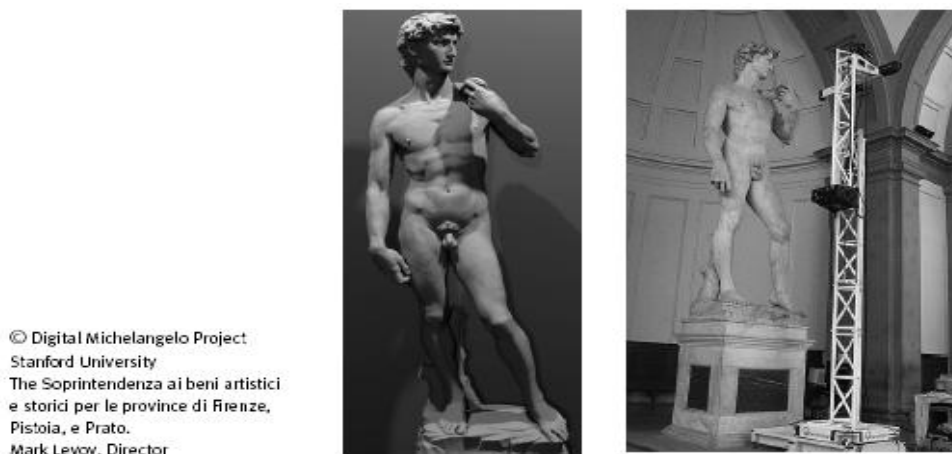


图 1.2 三维几何模型的获取能力飞速发展

尽管几何造型技术已经发展了多年，但手工制造几何模型的繁琐过程大大阻碍了三维几何模型的应用。近几年来，得益于各种低档和高档三维扫描仪提供的三维几何获取能力的大大发展，把现实世界中的物体数字化成三维几何模型已经不再困难。最著名的例子是 Stanford 大学的 Digital Michelangelo Project [Levoy2000] (图 1.2)，该项目通过一整套三维扫描硬件和三维重建软件系统完成了一些大型雕塑的数字化过程，生成的最复杂的模型三维模型包括 20 亿个多边形和 7000 幅彩色图像！另外，计算机运算能力和存储能力的大大提高以及各种图形加速卡出现使得在个人计算机上处理三维几何数据变得很容易。这些因素再加上 Internet 的飞速发展使得我们有理由相信三维几何将继声音、图像和视频之后掀起新一轮的多媒体数据革新高潮。事实上，这几年三维几何在影视工业、游戏工业和制造工业的广泛的使用已经验证了这一点。相应于三维几何数据的广泛应用，一门处理几何数据的学科—数字几何处理—也应运而生。相对于前三种多媒体数据，数字几何处理具有更多的难点和更大的挑战性。

1.2 三维几何数据表示

在计算机图形学中，三维几何模型通常包含两部分内容：一部分是几何模型的形状，另一部分是几何模型的外观属性。

描述物体形状的方法有很多种，如体素表示法（Voxel）、CSG 树表示法以及边界表示法等等。其中边界表示法又有隐函数曲面、参数曲面、细分曲面、多边形网格（Mesh）和点几何表示等。从三维计算机图形学发展的初期开始，多边形网格就是最通用的表示物体形状的方法。多边形网格模型具有以下优点：1) 多边形形状简单，便于计算和处理；2) 多边形可以任意精度逼近一曲面物体，并可以表示拓扑非常复杂的物体；3) 只需存储各多边形顶点的位置坐标及属性即可表示物体的几何信息，在计算多边形内任一可见点的光亮度时，所需的信息可由顶点的信息插值得到，这使得对多边形网格的绘制可采用硬件加速技术来实现。多边形网格模型可以由各种商用动画软件如 Alias, Wavefront, Softimage, Maya 和 3DMAX 生成，或者通过三维激光扫描仪在物体表面测得一系列离散点后由表面重构算法生成，或者由曲面模型离散得到。图 1.3 给出了几个多边形网格模型的例子。本文的研究对象就是多边形网格模型。因为任意多边形可以很方便地被剖分为三角形，我们只处理三角形网格模型。

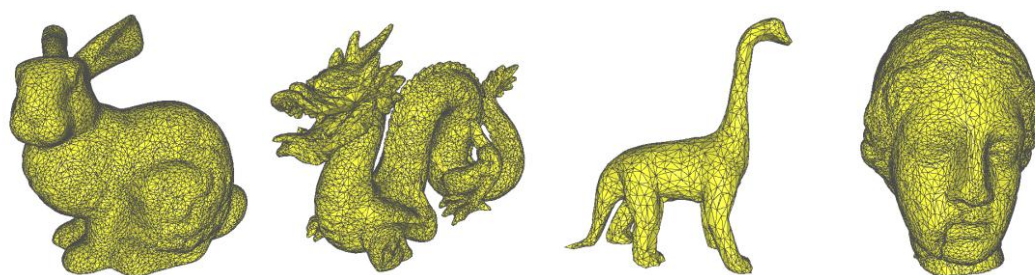


图 1.3 多边形网格模型



图 1.4 带有颜色属性的三角形网格模型

几何模型的外观描述了物体表面上入射光线和出射光线之间的相互作用关系，是物体本身固有的一种物理性质。在计算机中，我们通常用一些容易被理解的属性来描述，如顶点颜色（Color）、光泽度（Shininess）和透明度（Transparency）等等。对于真实世界中表面细节极其丰富的物体，人们还研究了多种复杂的外观表示方法，如双向反射函数（BRDF: Bi-directional Reflection Distribution Function）、纹理映射（Texture Mapping）、凹凸纹理映射（Bump Texture Mapping）和双向纹理函数（BTF: Bi-directional Texture Function）等。图 1.4 给出了一些带有颜色属性的三角形网格模型。

1.3 数字几何处理的研究范畴和应用领域

广义的数字几何处理包括三维几何数据的获取和处理两部分。获取是指为真实世界中的物体生成三维几何模型。最常用的获取技术是通过三维激光扫描仪在物体表面测得一些离散点，然后用散乱点重构算法生成网格模型 [Amenta1998, Hoppe1992, Hoppe1993, Hoppe1994]。另外也有些算法能从物体的多幅深度图像中重建三维几何模型 [Curless1996]。

与数字图像处理类似，三维几何数据处理的理论框架和应用两部分组成。理论框架研究的目标是试图把经典信号处理领域的线性系统理论推广到三维几何信号处理，为三维几何信号建立类似于图像处理中的 Fourier 变化、小波变换等正交分析工具，理论框架构成了应用的基础；数字几何处理应用则涵盖了所有涉及到几何数据的应用，包括去噪声、存储和传输、版权保护、编辑、变形和动画等等。图 1.5 显示了一个人头模型的低通滤波过程。

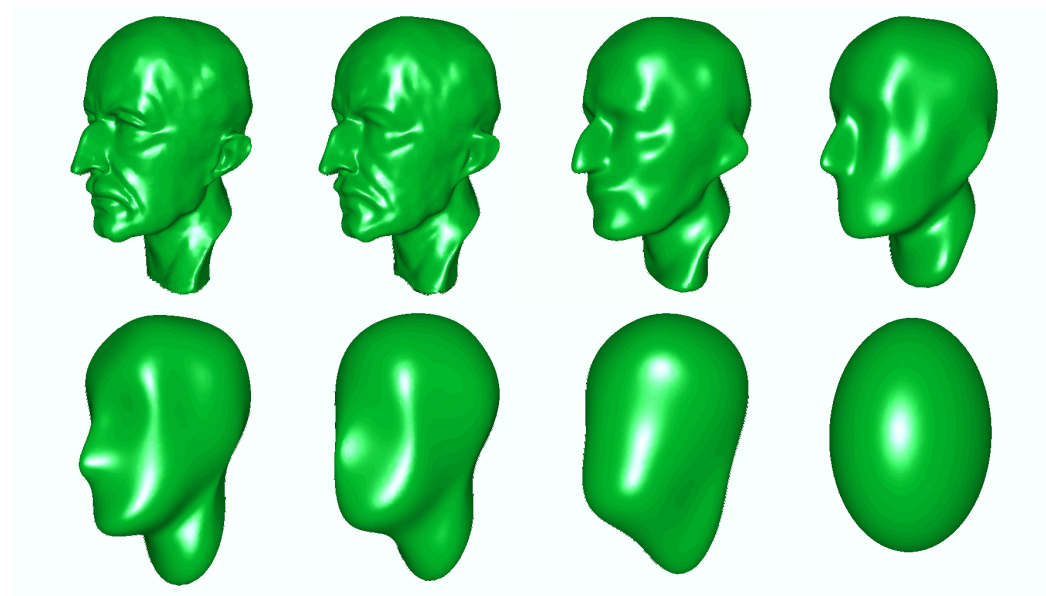


图 1.5 一个人头模型的低通滤波过程

随着三维几何模型在工业界的广泛应用，DGP 的应用领域也越来越广。最为人们所熟知的是影视行业。为了带给观众在真实世界中无法体验了视觉感受，大量的三维动画技术被应用到影视制作中，例如《终结者》中终结者由人化为一滩金属液体，又从液体渐变成人形。图 1.6 显示了马模型变形为兔子模型的过程。在制造工业中，我们还通常需要对输入的三维数据去噪声和进行编辑。DGP 的其他应用领域还包括游戏工业、CAD、电子商务和制造工业等等。

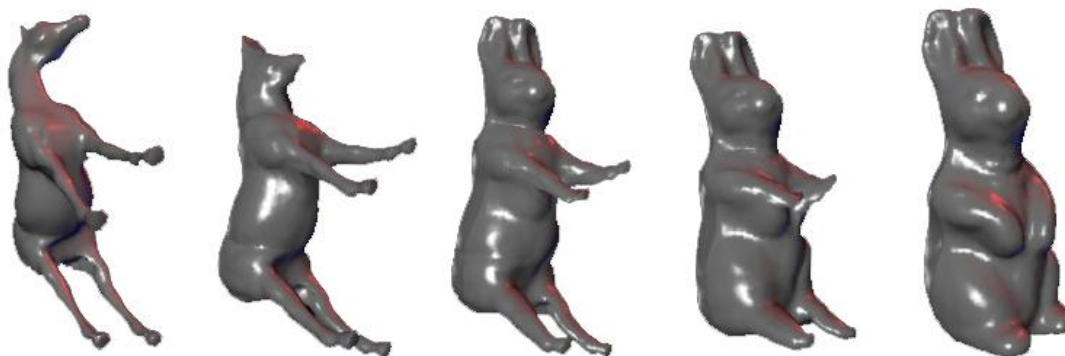


图 1.6 马变形为兔子 [Lee1999]

1.4 数字几何处理的困难和挑战

众所周知，传统的三种数字多媒体数据都是定义在平坦欧氏空间中的信号。声音是时间的一维函数，图像是定义在二维平面上的函数，视频是定义在二维平面和时间轴上的三维函数。这使得经典的 Fourier 分析可以被用来把这些信号分解到频率域。另外由于这些媒体都是规则采样的，即在其定义域内的采样间隔是一致的，快速 Fourier 变换（FFT）可以适用于这些数据。Fourier 分析和快速 Fourier 变换（FFT）以及其他正交分析工具构成了大多数传统多媒体数据处理应用的基础。

数字几何处理的主要困难在于 3D 网格模型表面通常是任意弯曲、复杂和缺乏连续参数化的，并且定义在模型表面各种属性（包括顶点位置坐标、法向量和颜色等）都是非规则采样的。这使得经典的正交分析工具无法被直接用来处理 3D 几何信号。如何把传统欧氏几何空间中的信号处理技术推广到 3D 几何是 DGP 的最大挑战，也是计算机图形领域的一个公开问题。

1.5 数字几何处理的研究现状

由于三维几何数据的获取技术已经发展得比较成熟，本文只研究狭义的 DGP 技术，即几何信号处理。一般来说，现有的 DGP 算法可以分为三大类：（1）基于子分网格（Subdivision Meshes，也被称为半规整网 Semi-regular Meshes）的方法；（2）基于松弛算子（Relaxation Operator）的方法；（3）几何图像（Geometry Image）的方法。基于子分网格方法的理论基础是子分小波（Subdivision Wavelets），也是目前最为成功的 DGP 框架，很多 DGP 应用（特别是几何数据压缩）在这个框架可以很高效率地实现。但这种方法的连续性很难证明，并且不能处理几何信号的某些低频分量。基于松弛算子的方法可以在推广到三维网格的离散 Fourier 变换（DFT）中找到的理论基础。尽管三维网格的 DFT 理论上是完备的，但由于直接计算 DFT 的时间代价太高，这种方法无法支持大多数 Fourier 频率域内的应用，一般只能用来做网格光顺造型。几何图像通过把任意

网格参数化到平面上生成能存储模型各种属性的图像，这种方法很好地了解决网格模型的绘制和压缩，但能否支持其它应用还有待进一步的研究。

1.5.1 基于子分网格的 DGP 算法

子分网格的大多数顶点的入度（即邻接顶点的个数）都为 6，通常是由一个基网格进行若干次 1-4 子分操作生成的。图 1.7 给出了 1-4 子分操作示意图，每个三角形被分成 4 个小三角形。研究者们发现通过这种子分操作可以构造小波基函数，从而对任意流形网格进行小波变化和小波分析。由于一般网格的拓扑连接是非规整的，这种方法需要先构造具有子分连接的网格模型来逼近原始网格模型，这个过程被称为重采样网格（Remeshing）。下面我们先介绍如何通过子分过程构造小波变换，然后介绍重采样网格算法，最后介绍基于这种方法的一些 DGP 应用。

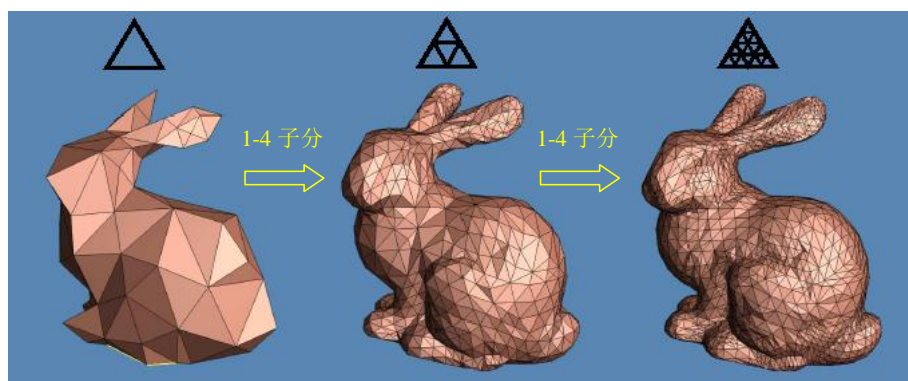


图 1.7 子分操作和子分连接网格 [Eck1995]

1.5.1.1 任意拓扑子分网格的小波分析

在图像压缩中普遍使用的二维小波通常是从单变量小波的张量内积构造出来的 [Daubechies 92]，由于张量内积小波构造方法要求函数是定义二维平面或二维平面的周期表示（如圆柱面或圆环面）上，因此这种方法不适用于一般的流形表面。其它的不是使用张量内积构造出来的小波也不能适用于定义在一般模型表面的函数。在把小波分析推广到任意拓扑表面上的研究中，最有代表性的有 Lounsbery 提出的子分小波 [Lounsbery1993] 和 Schröder 等人提出的球面小波（Spherical Wavelets）[Schröder95]。

Lounsbery 最先提出了一类基于子分曲面的小波。这种子分小波是从标准多分辨率分析扩展出来的。与经典的在规则域上伸缩和平移构造出来的小波不一样，这类小波基于逐步精化的伸缩函数。Lounsbery 还给出了基于这种小波分析算法的一些应用，包括绘制过程中的连续多细节层次控制、几何模型的压缩以及动画过程的预浏览。

多分辨率分析的基本思想是把一个复杂的函数分解为一个简单的低分辨率部分加

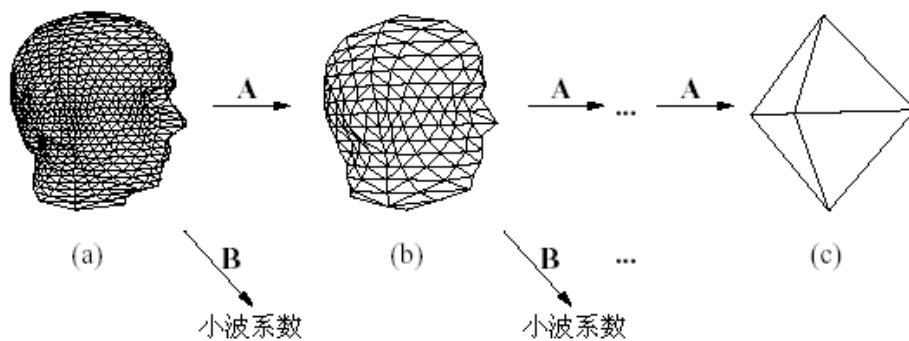


图 1.8 Lounsbery 子分小波

上一些被称为小波系数的细节。对于大部分在实践上遇到的函数来说，这些小波系数有很大一部分都很小，这意味着我们可以只用一部分最大的小波系数来很好地逼近原函数。图 1.8 给出了一个三维人头模型的小波分解过程。图 1.8(a)所示多面体的低分辨率部分显示在图 1.8(b)中，图 1.8(b)中的顶点都是由图 1.8(a)中的顶点加权平均计算出来的。这种加权平均本质上实现了一个低通滤波器 **A**。细节部分对应于图 1.8(a)中顶点的加权差值，被称为小波系数。这个加权求差构成了一个高通滤波器 **B**。这个分析过程可以继续下去，最后原始多面体可以表示为最粗层次的表示（图 1.8(c)）加上所有层次的细节。合成是分析的逆过程，从最粗层次多面体开始，通过为引入每条边的中点把每个三角形细化为 4 个三角形(细化滤波器 **P**)，然后根据小波系数扰动所有的顶点(扰动滤波器 **Q**)。所以对任意子分曲面做多分辨率分析的关键是在满足下面三个条件的基础上构造上述 4 个滤波器：(1) 低分辨率模型是原始模型的较好逼近；(2) 小波系数值的大小能反映系数所对应误差的大小；(3) 分析和合成滤波器的时间复杂度与顶点数目是线性关系。

多分辨率分析的两个关键成分是线性函数构成的嵌套向量空间和内积运算。设基网格为 K^0 ， K^j 为对 K^0 执行 j 次 1-4 子分操作得到的子分网格， V^j 为定义在 K^j 上的所有分段线性函数构成的向量空间。显然 V^0, V^1, \dots 构成了一个嵌套空间，即 $V^0 \subset V^1 \subset \dots$ 。Lounsbery 采用标准的内积定义：

$$\langle f, g \rangle = \int_{x \in K^0} f(x)g(x)dx$$

这个内积运算可以被用来定义下面正交的小波空间：

$$W^j = \{f \in V^{j+1} \mid \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in V^j\}$$

显然，如果用 V^j 中的函数来逼近 V^{j+1} 中的函数， W^j 可以捕捉到丢失的细节。

V^j 中的基函数 ϕ^j 被称为伸缩函数 (Scaling Functions)。在子分分段线性函数的情况下，最简单的伸缩函数是定义在 K^j 上的“帽子”函数 (Hat Functions)。在顶点 $x_i^j \in K^j$ 处的帽子函数 ϕ_i^j 是一个分段线性函数，它在 x_i^j 处的值为 1，从 x_i^j 开始向 x_i^j 的邻接顶点平滑地过渡到 0，并且它在其它顶点处的值为 0。小波就是小波空间 W^j 的基函数 $\psi_i^j(x)$ ， V^j 的小波基由 V^0 的基和其它小波空间 W^0, \dots, W^{j-1} 中的基构成。定义在 K^j 上的分段线

性函数 $f^J(x)$ 可以分解为:

$$f^J(x) = \sum_i v_i^J \phi_i^J(x) = \sum_i v_i^0 \phi_i^0(x) + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_i w_i^j \psi_i^j(x), \quad x \in K^J,$$

其中 v_i^j 表示 K^j 中顶点处的函数值, w_i^j 表示小波系数。

Lounsbery 在论文中还给出了一个滤波器仓库分析算法, 用它来在帽子函数展开和小波基展开之间做转换。滤波器仓库合成算法能从函数多分辨率表示重构出原始函数。

受 Lounsbery 工作的启发, Schröder 和 Sweldens 提出了在球面上构造具有定制性质的二进正交小波的算法。他们使用提升技术 (Lifting Scheme) 构造了两类球面小波, 一类是基于伸缩函数插值, 一类是基于扩展的 Haar 小波。正如作者所指出的那样, 这种小波构造方法可以很方便地拓展到任意流形网格表面, 当然也要求网格具有子分连接性。与 Lounsbery 的线性小波 (简称为 LDW) 是伪正交的相比, 球面小波是正交的, 并且可以根据应用需求定制某些属性, 所以这种小波被称为第二代小波, 而 LDW 属于第一代小波。从实验结果来看, 球面小波构造方法的时间和空间效率都要高于 LDW。而且从数据压缩应用来看, 球面小波具有更高的压缩效率。因此, 目前基于半规整网格的 DGP 算法都采用第二代小波作为信号分析工具。

1.5.1.2 重采样网格算法

由于从三维重建算法和各种造型软件得到的三角形网格模型通常不具备子分连接性, 因此上小节介绍的小波分析算法无法直接应用到这些网格模型。这个问题在很长时间内阻碍了小波分析算法的应用。尽管 Eck 等人 [Eck1995] 1995 年就提出了一个重采样网格算法来克服这个困难 (重采样算法的目的是构造一系列具有子分连接性的网格模型, 这些网格可以以任意小的误差逼近原网格模型), 由于时间复杂度太高, 这种算法

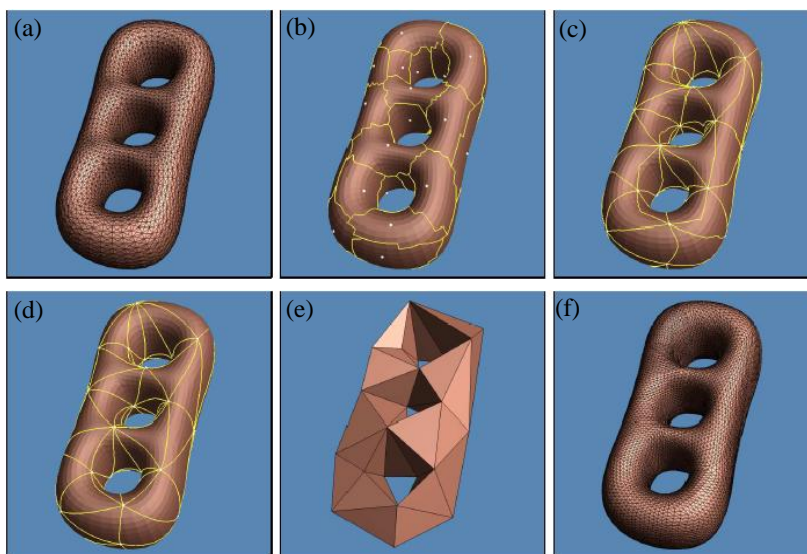


图 1.9 Eck 的重采样网格算法

没有得到广泛应用。直到 1998 年, Lee 等人提出的 MAPS [Lee1998] 算法很好地解决了这一困难, 这才使得的基于子分网格的 DGP 框架得到广泛应用。

重采样算法的关键是把原始网格模型参数化到某个基网格上。为了保证重采样网格的质量, 参数化要尽可能光滑。Eck 的参数化算法采用分片技术 (Partition) 和调和映射技术 (Harmonic Map)。如图 1.9 所示, 该重采样算法由 3 步构成: (1) 分片; 输入网格的所有三角形被分成一组类似于 Voronoi 的片 (图 1.9(b)), 这个 Voronoi 图的对偶图构成了输入网格的一个类似 Delaunay 的初始剖分, 输入网格就被剖分成一组三角形区域 (图 1.9(c)), 所有三角区域对应的三角形构成了原始网格模型的基网格 (图 1.9(e), 即参数域)。(2) 参数化; 在保持边界的约束下, 使用调和映射把每个三角形区域内的所有顶点嵌入对应的三角形内部, 生成初始参数化。通过在参数域内拉直相邻两个三角形区域的公共边得到改善的 Delaunay 剖分 (图 1.9(d)) 和相应的参数化。(3) 重采样; 对基网格实施 1-4 子分操作, 并用参数化的逆映射把新生成的顶点映射到原始网格模型表面得到具有子分连接性的网格 (图 1.9(f))。执行子分操作的次数可以由用户指定的误差精度控制。这个算法最大的缺点是分片算法的不稳定以及分片和调和映射的时间代价比较高。

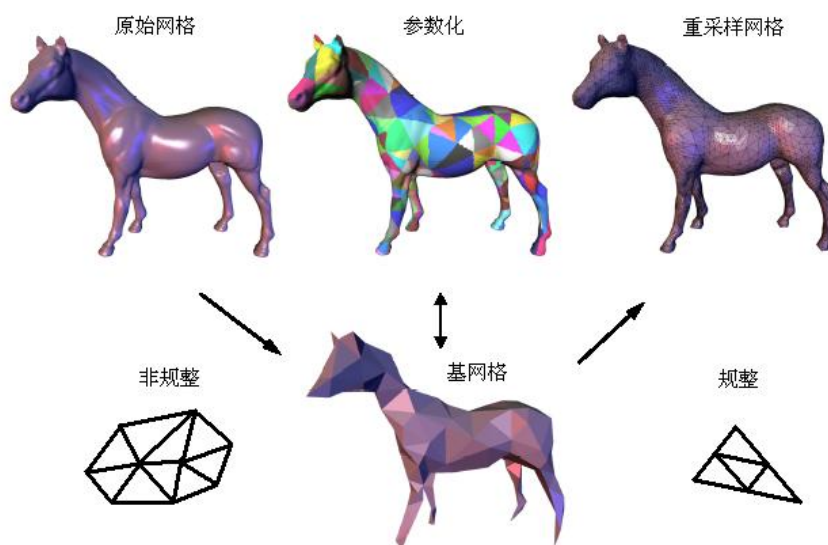


图 1.10 MAPS 重采样算法

MAPS 采用分层简化和局部保角映射 (Conformal Map) 技术来构造一个初始参数化, 然后通过参数化域内实施 Loop 子分操作来提高参数化的光滑程度。另外, MAPS 还支持自动的和用户指定的约束操作, 通过对顶点和边加约束可以强制对齐对应某些特征的等值参数线。该算法包括以下 4 部分: (1) 层次简化; 循环删除当前简化网格的最大独立点集, 重新三角化由此生成的空洞得到新的简化网格, 直到当前简化网格的三角形数目达到用户需求。(2) 初始参数化; 通过局部保角映射把新被删除的顶点参数化到当前简化网格表面上, 前面被删除的顶点也相应地被参数化到当前简化网格表面。当层次简化过程结束时, 所有被删除的顶点都被参数化到基网格表面上。(3) 重采样; 通过用 Loop 子分的方法调整参数域内新引入顶点的位置能提高参数化的光滑性。另外作者

还给出了一个自适应采样算法，能以较少的三角形数目保持原始模型细节。图 1.10 给出了 MAPS 算法的示意图。与 Eck 的算法相比，MAPS 更稳定，而且时空效率更高。后来 Guskov 等人在构造法向网格（Normal Meshes）的过程中综合了 Eck 算法和 MAPS 的优点，提出了一种能生成更光滑参数化的算法 [Guskov2000]。

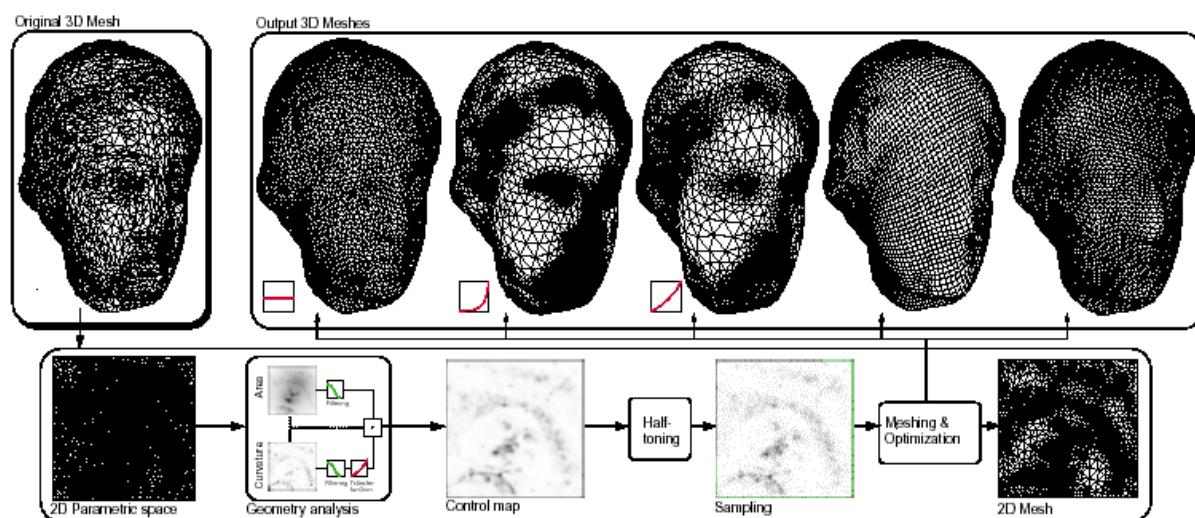


图 1.11 交互式几何重采样算法 [Allize2002]

与 Eck [Eck1995] 和 MAPS 通过循环执行子分操作直到用户指定的采样精度被满足为止不同，最近 Allize 等人提出了一个交互式的网格重采样算法 [Allize2002]。他们解决的问题是：在给定采样率下（例如一定数目的采样点），如何最优地分布这些采样点使得采样误差最小。更进一步的问题是如何提供一种可供用户交互式控制采样点分布的手段。如图 1.11 所示，该算法首先采用 Guskov 的算法 [Guskov2000] 为原始网格生成基网格域上的参数化表示，然后在参数域上分析得到一些二维特征图（例如面积图和曲率图）；这些特征图加上用户给出的一些控制图可以组合生成一个采样控制图，传统数字图像处理中的半色调（Halftoning）技术被用来根据这个采样控制图最优地分布给定数目的采样点；对分布好的采样点执行带约束的 Delaunay 三角化和快速优化后就可以生成重采样网格。作者还采用 OpenGL 缓存来加速算法的各个环节，这使得用户可以实时设计和浏览算法生成的网格。尽管这个算法生成的网格的顶点具有较均匀的入度分布，它最大的不足是无法保证生成的重采样网格具有子分连接性。

1.5.1.3 应用

目前已经实现的基于子分网格技术的典型 DGP 应用包括多分辨率编辑 [Zorin1997]、几何压缩 [Khodakovsky2000] 和网格变形 [Lee1999] 等。另外，为了支持涉及多个几何模型的 DGP 应用，Praun 等人 [Praun2001] 把一组模型参数化到同一个参数域上，提出了一致网格参数化的概念（Consistent Mesh Parameterization）

Zorin 等人结合子分技术和我们后面将要介绍的光顺造型技术 [Taubin1995a] 实现了一个交互式多分辨率编辑系统 [Zorin1997]。该系统首先对输入的具有子分连接的网

格做多分辨率变换。对第 i 层次的网格，分析算法先通过光顺算子 H 计算第 $i-1$ 层次网格顶点的位置 s^{i-1} ，然后对第 $i-1$ 层次网格执行子分操作 S 得到第 i 层次网格顶点的新位置 $S s^{i-1}$ ，新位置和原位置在以新位置为原点的局部坐标系下的坐标之差被记录为第 i 层次网格的细节 $d^i = s^i - S s^{i-1}$ 。合成算法就是多分辨率变换的逆过程，从某一层次开始，不停地执行子分操作和加上当前层次的细节就可以得到原始分辨率的模型。当用户选定一个编辑层次 l 时，原始网格就可以用该层次网格加上所有高层次的细节来表示。用户可以对选定层次的网格自由地编辑，而高层次细节保持不变，系统调用合成算法实时地绘制对应于编辑操作的高分辨率模型。为了克服均匀子分带来的时间和空间的指数增长，作者还开发了自适应分析、自适应合成、局部合成以及自适应绘制算法。

基于子分网格最成功的 DGP 应用是 Khodakovsky 等人提出的累进几何压缩 [Khodakovsky2000]。注意到网格模型由几何信息、参数化信息和连接信息三部分组成，并且后面两部分信息对压缩误差影响很小，该算法采用子分网格技术去掉了参数化信息和连接信息，然后采用子分小波变换和零树编码 (Zerotree Coding) 来压缩几何信息。因为子分小波只能处理标量数据，对几何信息分解出来的 XYZ 三个分量的小波系数被单独处理。为了减少 XYZ 三个分量之间的相关性来提高压缩率，所有的小波系数都被表示为由网格表面的切平面决定的局部坐标系里。这种累进几何压缩算法可以达到迄今为止最高的压缩信噪比，比其它的累进压缩算法提高了 4 倍 (12dB)。另外，作者指出如果该算法结合法向网格 [Guskov2000] 可以达到更高的压缩率 [Khodakovsky2002]。这是因为法向网格是一种多分辨率子分网格表示，每一层次的网格都可以表示为较粗层次网格的法向偏移。这样法向网格的每个顶点都只需要一个浮点数来表示，这使得压缩信噪比能提高 2-5dB。

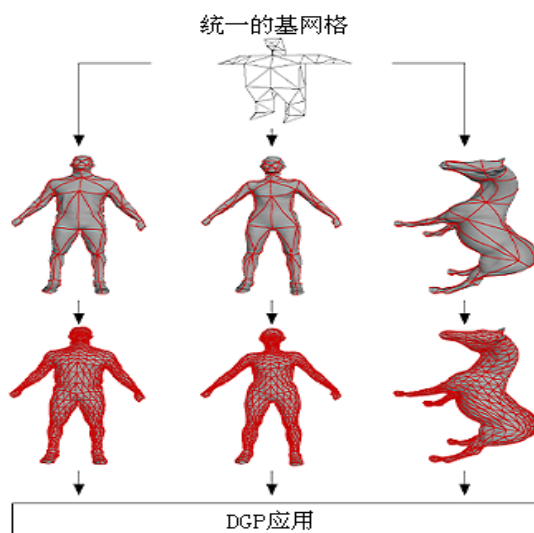


图 1.12 一致的网格参数化

Lee 等人基于他们的 MAPS [Lee1998] 参数化方法给出了一种网格变形算法 [Lee1999]。输入的两个网格模型先被参数化到各自的基网格上，然后这两个基网格合并成一个新的网格，原来的基网格都是这个新的基网格的子图。通过这种方法，网格变

形技术中的关键步骤（特征对齐和对应建立）就在基网格上完成了。当然，这种方法要求用来合并的基网格的形状要比较接近，这样才能用比较简单的方法来完成基网格合并。图 1.6 的变形结果就是该算法生成的。

Praun 等人 [Praun2001] 提出了一个能同时为多个网格模型构造定义在同一参数化域上的参数化的算法（图 1.12），被称为一致网格参数化。因为所有模型都共享统一的参数化基网格，子分重采样得到的网格就具有相同的连接。这个算法成为涉及多个网格模型的 DGP 应用的基础，包括主元分析（PCA: Primary Component Analysis）、小波变换、模型间的细节和纹理传输以及多路形状融合（N-way Shape Blending）。尽管作者宣称该算法能处理任意网格，但文中只给出了亏格为零（Genus-Zero）的例子，该算法处理任意网格的稳定性还有待进一步测试。另外，该算法需要手工标定一个适用于所有模型的基网格，这对很多复杂的网格来说并不容易。

1.5.2 基于松弛算子的 DGP 算法

与基于子分网格的 DGP 算法相比，基于松弛算子的 DGP 算法在理论上没有那么复杂，在应用领域上也有一些限制。但这种算法可以处理任意形状和任意连接关系的网格模型，而且算法的时间空间代价很小。在某些领域（如光顺造型和多分辨率编辑），这种方法已经得到了广泛应用，即使是基于子分网格的算法也借鉴了它的一些思想（如 Zorin 的多分辨率造型系统 [Zorin1997] 就采用了 Taubin 的光顺算子 [Taubin1995a]）。下面我们先介绍 Taubin 基于信号处理的光顺造型算法 [Taubin1997] 和 Guskov 的基于非均匀松弛算子的多分辨率信号处理算法 [Guskov1999]，然后描述基于这类方法的一些 DGP 应用。

1.5.2.1 流形网格的 DFT 和光顺造型

1995 年，Taubin 开创性地把经典离散 Fourier 变换推广到了流形网格上。设网格表示 $M = \{V, F\}$ ，其中 V 是 n 个顶点的集合， F 是三角形集合。顶点 v_i 的邻居 i^* 是由所有和 v_i 有边连接的顶点的索引构成的集合，即 $j \in i^*$ 当且仅当 (v_i, v_j) 是网格 M 中的一条边。网格 M 上的离散信号被定义为 n 个顶点上的信号值构成的 n 维向量 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ 。在顶点 v_i 的离散信号的离散 Laplacian 算子被定义为加权平均：

$$\Delta x_i = \sum_{j \in i^*} w_{ij} (x_j - x_i)$$

其中权值 w_{ij} 都是正数，并且对任意 i 都有 $\sum_{j \in i^*} w_{ij} = 1$ 。 w_{ij} 可以根据邻居结构用不同的方法来指定，最简单的方法是设置为邻居个数的倒数 $1/|i^*|$ 。更一般的方法是根据网格中边的信息定义一个正值函数 $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ ，权值 w_{ij} 可以定义为：

$$w_{ij} = \frac{\phi(v_i, v_j)}{\sum_{h \in i^*} \phi(v_i, v_h)}$$

例如 $\phi(v_i, v_j)$ 可以是共享这条边的两个三角形的面积，或者是边长的指数。如果网格中的三角形大小都差不多，不同的权值得到的结果差不多。

令 $W = (w_{ij})$ 为权值矩阵，如果 v_j 不是 v_i 的邻居，则 $w_{ij} = 0$ 。Laplacian 算子矩阵定义为 $K = I - W$ 。Taubin 证明 K 有 n 个实的特征值 $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \leq 2$ 和它们对应的特征向量 u_1, \dots, u_n ，这些特征向量可以被看作网格表面的自然振动模式，对应的特征值可以被看作是网格表面的自然频率。离散信号 x 可以表示这些特征向量线性组合 $x = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$ ，这就是信号 x 的离散 Fourier 变换。

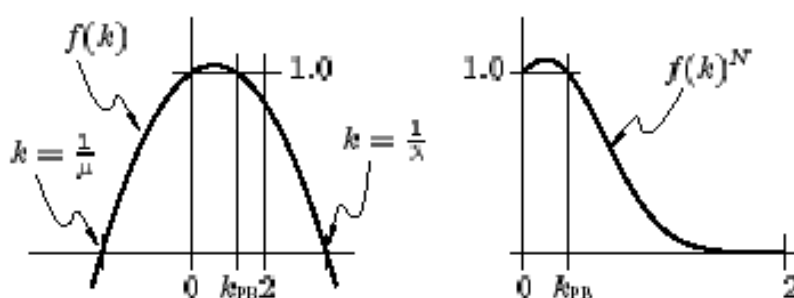


图 1.13 多项式低通滤波器设计

如果网格模型包含成千上万个顶点，直接求解 K 的特征向量显然是不可行的，这就限制了这种方法不可能处理信号的所有频段。Taubin 注意到对于低通滤波（即光顺）来说，上述频率分解和处理过程可以用 Laplacian 算子矩阵 K 的某个函数乘以原信号来近似表示为： $x' = f(K)x$ 。一元函数 $f(k)$ 被称为传输函数（Transfer Function），也被称为松弛算子，可以是任意形式，但一般只考虑多项式函数：

$$x' = f(K)x = \sum_{i=1}^n \xi_i f(k_i) u_i$$

如果上述光顺过程循环 N 次，则 $x^N = f(K)^N x$ 。对于低通滤波器来说，我们希望找到一个多项式使得对较小 k 值（即低频成分） $f(k)^N \approx 1$ ，对较大 k 值（即高频成分） $f(k)^N \approx 0$ ， k 的取值范围是 $[0, 2]$ 。Taubin 设计的滤波器是：

$$f(k) = (1 - \lambda k)(1 - \mu k)$$

其中 $\lambda > 0$ ， μ 是一个新的负放缩因子并且 $\mu < -\lambda$ 。图 1.13 给出了这个传输函数的图形表示。因为 $f(0) = 1$ 并且 $\lambda + \mu < 0$ ，存在一个带通频率 k_{PB} 使得 $f(k_{PB}) = 1$ ，显然：

$$k_{PB} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} > 0$$

基于上面的光顺算子，Taubin 借助 Subdivision 实现了一个交互式的曲面设计工具。Taubin 等人后来还把传统的用来设计有限脉冲相应滤波器的技术结合到这个方法中来设计最优的网格光顺滤波器 [Taubin1995b]。

1.5.2.2 基于非均匀松弛算子的 DGP 算法

1999 年, Guskov 提出了一种强壮的基于非均匀算子的多分辨率信号处理算法。通过结合网格简化技术, 该算法把一般的信号处理工具如向下采样、向上采样和滤波推广到任意三角形网格。Guskov 还给出了很多基于该算法的 DGP 应用, 如光顺、增强、编辑和纹理映射。从实验结果来看, 这种算法是目前最好的顶点位置坐标的信号处理方法。

Guskov 最大的贡献是设计了一种同时依赖于几何和拓扑连接的非均匀松弛算子, 该算子的目标是最小化二次导数。而 Taubin 的松弛算子 $f(k)$ 或者是只依赖于拓扑连接, 或者是依赖于边长这种简单的几何信息。因此 Guskov 的松弛算子比 Taubin 的松弛算子更具有几何意义, 能取得更好的效果。

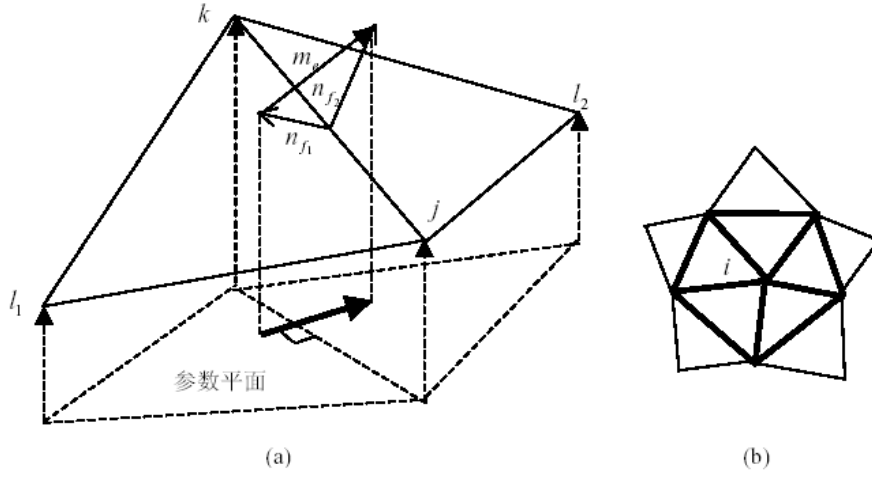


图 1.14 Guskov 的非均匀松弛算子

考虑网格中的一个三角形 $f = \{i, j, k\}$, 顶点在参数平面坐标系下的坐标为 $p_i = (u_i, v_i, g_i)$, 其中 u, v 是相互独立的参数平面变量, g 是 u, v 的函数。显然, g 在三角形 f 上的梯度为 $\nabla_f g = (\partial g / \partial u, \partial g / \partial v)$, 而 f 的法向量为 $n_f = (-\partial g / \partial u, -\partial g / \partial v, 1)$ 。如图 1.14(a)所示, 考虑边 $e = \{j, k\}$ 以及共享 e 两个三角形 $f_1 = \{j, k, l_1\}$ 和 $f_2 = \{j, k, l_2\}$, 二次导数被定义为 f_1 和 f_2 的法向量之差 $m_e = n_{f_1} - n_{f_2}$ 。显然 m_e 落在参数平面上, 且垂直于边 e 在参数平面上的投影, 因此只有 m_e 的带正负号长度 $D_e^2 g$ 有意义。 $D_e^2 g$ 取决于 g 在顶点集 $w(e) = \{j, k, l_1, l_2\}$ 的值。因为所有计算 $D_e^2 g$ 的操作 (梯度、求差和投影) 都是线性的, 所以 $D_e^2 g$ 也是线性的, 不难得到:

$$D_e^2 g = \sum_{l \in w(e)} c_{e,l} g_l$$

系数取值如下:

$$c_{e,l_1} = \frac{L_e}{A_{[l_1,k,j]}}, \quad c_{e,l_2} = \frac{L_e}{A_{[l_2,j,k]}}, \quad c_{e,j} = -\frac{L_e A_{[k,l_2,l_1]}}{A_{[l_1,k,j]} A_{[l_2,j,k]}}, \quad c_{e,k} = -\frac{L_e A_{[j,l_1,l_2]}}{A_{[l_1,k,j]} A_{[l_2,j,k]}}$$

其中 $A_{[k_1, k_2, k_3]}$ 是由 $(u_{k_1}, v_{k_1}), (u_{k_2}, v_{k_2}), (u_{k_3}, v_{k_3})$ 构成的三角形的带符号面积, L_e 表示边 e 投影在参数平面上的线段长度。

松弛算子的目标就是最小化上述二次导数。如图 1.14(b)所示, 如果松弛顶点 i 上的函数值, 只有图中显示较为粗黑的边上的二次导数会发生改变, Guskov 的目标就是求得松弛算子在顶点 i 上的值 Rg_i 来最小化这些边的二次导数平方和 E 。设这些边构成的集合为 $\varepsilon_2(i)$, 图 1.14(b)中除去 i 的所有顶点的集合为 $v_2(i)$, 则有:

$$E = \sum_{e \in \varepsilon_2(i)} (D_e^2 g)^2,$$

$$Rg_i = \arg \min E = \arg \min \sum_{e \in \varepsilon_2(i)} (D_e^2 g)^2。$$

不难计算出:

$$Rg_i = \sum_{j \in v_2(i)} w_{i,j} g_j, \quad w_{i,j} = - \frac{\sum_{\{e \in \varepsilon_2(i) | j \in w(e)\}} c_{e,i} c_{e,j}}{\sum_{e \in \varepsilon_2(i)} c_{e,i}^2}$$

上述权值 $w_{i,j}$ 就构成了松弛算子。在计算网格模型中某条边的 $D_e^2 g$ 时, 由于没有现成的全局参数化, Guskov 使用一种被称为铰链映射 (Hinge Map) 的局部映射: 对共享一条边的两个三角形, 以公共边为转轴转动其中一个三角形直到两个三角形位于同一个平面上为止。把这个平面作为参数平面, 顶点的位置坐标成为定义在这个参数平面上的向量函数。因此, 对网格顶点的位置坐标做松弛时, 松弛算子就作用在三维空间中的点上:

$$Rp_i = \sum_{j \in v_2(i)} w_{i,j} p_j$$

基于上述松弛算子, Guskov 结合累进网格的多分辨率表示设计了适用于任意网格的多分辨率变换。对第 i 层次的网格, 算法先用半边折叠删除顶点 i 得到第 $i-1$ 层次网格, 然后用在 i 层次预计算的松弛算子计算顶点 i 及其邻接顶点的新位置, 这些顶点的新位置在和原位置在以新位置为原点的局部坐标系下的坐标之差被记录为第 i 层次网格的细节。合成算法就是多分辨率变换的逆过程, 从某一层次开始, 不停地加上被删除的顶点, 做松弛运算后加上当前层次的细节就可以得到原始模型。

1.5.2.3 应用

基于松弛算子的 DGP 应用主要有多分辨率编辑和几何压缩。在上小节已经提到了 Guskov 的信号处理方法可以很好地支持光滑、增强和多分辨率编辑, 下面我们简要介绍 Kobbelt 等人提出的交互式多分辨率编辑系统 [Kobbelt1998] 以及 Karni 和 Gotsman 提出的网格几何的谱压缩算法 [Karni2000]。

Kobbelt 等人从带约束的能量最小化磨光方法出发推出了和 [Taubin1995] 类似的松弛算子。能量最小化磨光方法的基本思想是通过最小化一种定义在曲面上的能量函数来达到磨光的目的。其中最基本的一种能量为曲率能量, 即两个主曲率的平方和在曲面上的积分。由于主曲率的计算非常困难, 在实际应用中, 人们通常采用薄膜 (Membrane)

能量:

$$E_M(S) = \frac{1}{2} \int_S (f_u^2 + f_v^2) dudv$$

和薄板 (Thin-plate) 能量:

$$E_{TP}(S) = \frac{1}{2} \int_S (f_{uu}^2 + 2f_{uv}^2 + f_{vv}^2) dudv$$

通过伞状算法 (Umbrella-algorithm) 为每个顶点的邻域构造一个局部参数化, Kobbelt 推出了对应于最小化薄膜能量的松弛算子 $f_M(k) = 1 - k$ 和对应于最小化整个曲率的松弛算子:

$$f_C(k) = 1 - \frac{1}{v} k^2 = (1 + \frac{1}{\sqrt{v}} k)(1 - \frac{1}{\sqrt{v}} k)。$$

为了实现快速光顺算法, Kobbelt 采用网格简化技术实现了一种多层次光顺算法。由于简化网格的顶点数目小于原始网格的顶点数目, 在多层简化网格上进行光顺的收敛速度远远大于直接在原网格进行光顺的速度。

把累进网格技术 [Hoppe1996]、局部标架编码和快速多层次光顺算法结合起来, 可以实现一个高效的多分辨率编辑系统。在该系统下, 用户可以选定累进网格表示中的某一层网格某个区域网格 M^* 做编辑。编辑开始前先对 M^* 执行多层快速光顺并计算光顺后的网格与原始网格之间的细节差, 编辑完成后再对 M^* 执行带约束的多层快速光顺。编辑后的光顺网格加上编辑开始前计算的细节差就可以得到编辑后保持细节的网格。最后通过累进网格中记录的局部细节就可以重构出编辑后的最高分辨率模型。

基于 [Taubin1995] 推广到三维网格的 DFT, Karni 和 Gotsman 实现了一种网格几何的 Fourier 频谱压缩算法。为了降低 Laplacian 算子矩阵特征向量分解的时间复杂度, 网格模型需要被划分成很多小片, 每片子网格单独计算。即使是这样, 这种方法的时间代价还是很高。而且分片会带来很多额外的计算和误差, 片边界附近的光滑性很难保证。另外, 就象图像领域一样, Fourier 变换并不适合压缩应用, 因此这种压缩方法远远比不上基于子分小波的压缩算法 [Khodakovsky2000]。

1.5.3 几何图像

最近, Gu 等人提出了一种新的三维几何模型的表示方法, 几何图像 (Geometry Image) [Gu2002]。任意网格首先被自动地切割成单独的一片开网格, 这个开网格被参数化到一个单位矩形内。所有的网格表面信号如顶点位置、法向量和颜色都可以被均匀采样成图像, 这种图像可以用传统图像压缩方法如小波技术来压缩。图 1.15 给出了龙模型的切割路径、顶点位置图像和法向量图像。

这种方法的核心技术是如何为任意模型找到一个较好的切割方法。Gu 采用的是一种增量式的切割方法: 先根据网格连接找到任意一个初始切割, 然后根据参数化的变形程度循环地调整切割路径。显然, 这个过程非常耗时。图 1.16 给出了一个切割的例子。

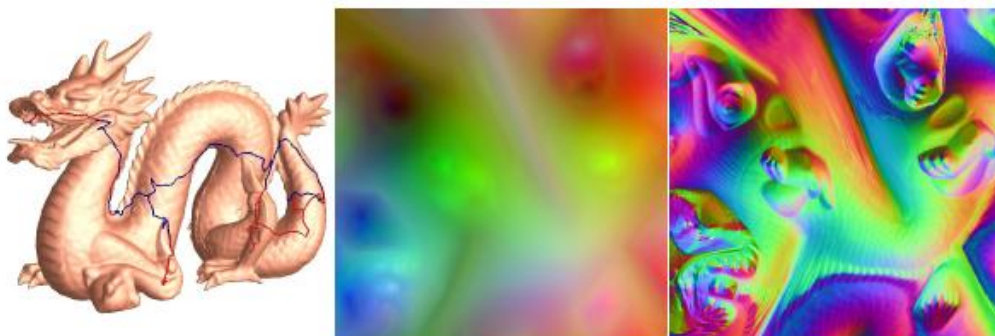


图 1.15 几何图像 [Gu2002]。左图为原始模型及其切割路径，右边两幅图分别为顶点位置图像和法向量图像。

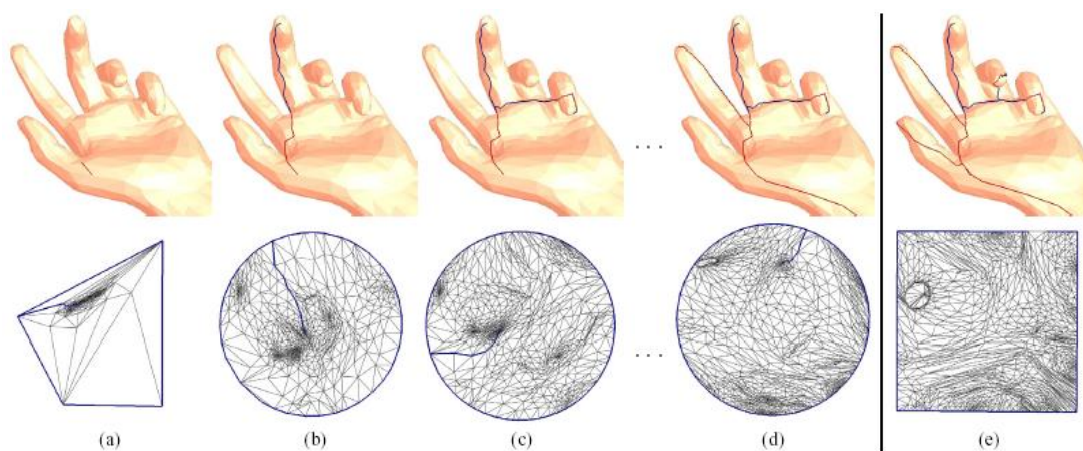


图 1.16 几何图像对模型的切割过程和参数化。(a)-(d)是中间结果，(e)是最后结果。

下面给出了几何图像算法切割和参数化的伪代码：

```
function Cut_and_parameterize(mesh  $M$ )
```

 删去种子三角形；

while 还存在只和一个三角形 t 邻接的边 e

 删去 e 和 t ；

while 还存在只和一条边 e 相连的顶点 v

 删去 v 和 e ；

 切割 $\rho :=$ 剩余的边和顶点；

if ρ 中只有一个单独的顶点 **then**

 把该顶点的两条邻接边加入 ρ ；

 拉直 ρ 中的每条切割路径；

 参数化 $\phi :=$ 使用 ρ 的几何变形参数化；

repeat

$f :=$ 使用 ρ 的 Floater 参数化；

$t :=$ 在 f 下最大伸缩变形的三角形；

$s :=$ 从 t 到 ρ 的最短路径；

$\rho' := \rho + s$ ；

$\phi' :=$ 使用 ρ' 的几何变形参数化；

if 的变形程度大于的变形程度 **then**

break；

$\rho := \rho'$; $\phi := \phi'$;
输出切割 ρ 和参数化 ϕ ;

基于这种方法，很多图像处理中的技术可以推广到三维几何上，其中最前景的应用是压缩。但由于构造几何图像需要对原模型做复杂的切割，这样带来的切割边界会限制它在很多领域的应用，比如信号滤波就不能直接采用图像滤波技术。

1.6 现有算法的优缺点分析

本节分析现有各种 DGP 算法的优缺点。

基于子分网格的算法作为目前应用最广泛的 DGP 算法具有如下特点：（1）能处理各种定义在任意子分连接网格表面上的连续信号；（2）本质上以基网格作为信号的定义域；（3）以子分小波为分析工具把信号分解为小波系数；（4）对非子分连接网格需要构造定义在基网格上的参数化，并做子分重采样，原网格的拓扑连接被完全丢弃；（5）通过为多个模型构造一致参数化可以支持设计多个模型的 DGP 应用；（6）最成功的应用是几何信号压缩。这种方法的缺点有：（1）尽管基网格比原始网格简单很多，但它仍然保持了原网格大部分全局特征和形状，与传统多媒体数据类型在欧氏空间中的定义域相比，基网格还是太复杂，很多传统信号处理技术无法适用；（2）尽管子分小波在实践中很成功，它的光滑性还很难证明；（3）由于跨越基网格边界的光滑性较难保证，在这种方法的目前实现中只给出了对位置坐标信号的处理，其它几何信号（如法向量和颜色）的处理结果还没有公开报道；（4）为多个模型构造定义在同一个基网格域上参数化还存在着很多困难。

[Guskov1999] 是目前最好的基于松弛算子的 DGP 算法，它具有如下特点：（1）能处理定义在任意网格顶点上的离散坐标位置信号；（2）本质上以网格的拓扑连接空间为信号定义域；（3）网格不需要具有子分连接性；（4）能很好地支持光顺、增强和多分辨率编辑应用。这类方法的缺点如下：（1）尽管 [Taubin1995] 把 DFT 推广到网格，但最后设计的光顺算子只是低通滤波运算的一种逼近，而 [Guskov1999] 把局部坐标系下的细节差定义为所谓频率只是一种直观的方法，作者也承认这不是传统信号处理意义下的频率，其光滑性很难证明；（2）因为松弛算子是根据几何意义（二次导数）构造的，这种方法无法处理除法向量和颜色信号；（3）因为信号的定义域是原始网格的拓扑连接空间，该方法无法支持涉及多个不同模型的 DGP 应用。

几何图像是作为一种新的几何表示方法提出来的，具有很大的研究潜力。它的特点如下：（1）通过自动切割和平面参数化算法能把任意网格转化为图像表示；（2）从某种意义上说所有图像处理应用都可以直接扩展到几何图像，最成功的是几何数据压缩。它的缺点主要有：（1）由于构造几何图像需要对网格模型做切割，切割边界的缝合和光滑性大大阻碍了它的应用，因而目前局限在压缩和绘制领域；（2）由于很难在切割和参数化阶段完成特征对应，几何图像方法很难支持涉及到多个网格模型的 DGP 应用。

表 1.1 给出了对几种典型的 DGP 算法的总结。为了方便比较，我们也评价了本文提出的 DGP 框架，后面的章节将对这些评价做详细分析解释。

表 1.1 各种 DGP 算法总结比较

| | | 子分网格 | [Taubin1995] | [Guskov1999] | 几何图像 | 本文框架 |
|--------|-----|----------------|--------------|--------------|----------------|---------------|
| 网格类型 | | 子分网格 | 任意 | 任意 | 任意 | 任意 |
| 预处理 | | 子分重采样 | 无 | 无 | 切割 | 切割(亏格非0) |
| 参数化 | | 基网格 | 无 | 局部铰链映射 | 平面参数化 | 球面参数化 |
| 理论基础 | | 子分小波 | DFT | 无 | 图像处理 | 调和与分析 |
| 频率定义 | | 小波系数 | 特征向量分解 | 局部细节差 | 无 | Fourier 频率 |
| 光滑性 | | 难证明, 跨基网格边界难保证 | 很难证明 | 很难证明 | 可以证明, 切割边界很难保证 | 可以证明, 切割边界难保证 |
| 信号 | 位置 | √ | √ | √ | √ | √ |
| | 颜色等 | √(有困难, 无实验结果) | × | × | √ | √ |
| 单个模型应用 | 光顺 | √(去噪声) | √(噪声) | √(较好滤波) | × | √(最好滤波) |
| | 增强 | √(没有试验结果) | × | √(较好) | × | √(最好) |
| | 编辑 | √ | √ | √(最好) | × | √(频谱编辑) |
| | 压缩 | √(最好) | √(效果不好) | √(效果不好) | √(最好) | √(很好) |
| 多模型应用 | | √(很难构造) | × | × | × | √(很方便) |
| 总结 | | 最适合压缩位置坐标信号 | 适合光顺造型 | 适合处理顶点位置坐标 | 最适合各种几何信号压缩 | 适用各种信号的分析、处理 |

1.7 本文工作

本文提出了一种统一的数字几何处理框架，其基本思想是通过为任意网格构造球面参数化来把原来定义在复杂网格表面的信号转化为球面信号，然后采用球面 Fourier 分析把这些球面信号分解到频率域。在这个框架下，所有的 DGP 应用可以根据需要在空间域和频率域之间自由切换。从这个意义上说，就象 Fourier 分析构成了大多数数字图像处理应用的基础一样，本文提出的框架构成了大多数 DGP 应用的基础。图 1.17 给出了框架的示意图。

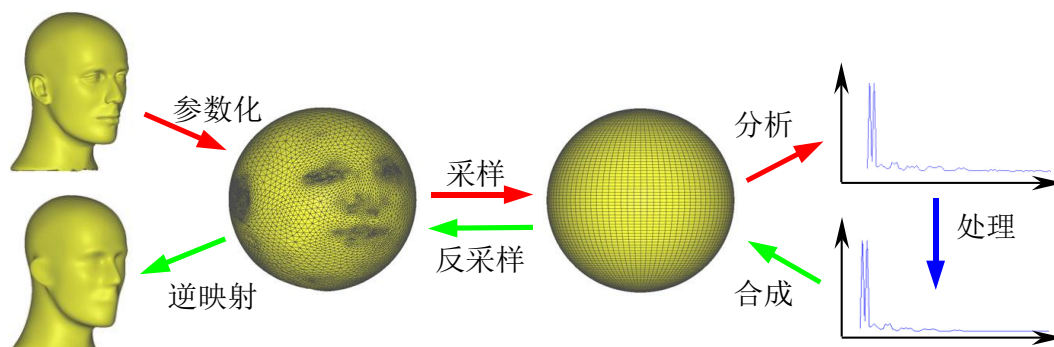


图 1.17 本文 DGP 框架示意图

本文后面的内容主要分为理论和应用两部分：理论部分介绍本文的 DGP 框架及其核心技术，包括第二章的框架概述、第三章的累进球面参数化算法和第四章的自适应采样算法。应用部分主要包括第五章在本文 DGP 框架的各种应用和第六章基于平面参数化的几何信号压缩。

为了描述方便，本文第二章首先定义三角形网格、几何信号、同构映射等概念，然后简要描述本文提出的几何信号处理框架的各组成部分，包括球面参数化、采样和精度控制、球面调和和分析等等。另外，本章还分析讨论了框架的一些特性。

第三章描述我们提出的累进球面全局参数化算法。该算法结合累进网格和局部参数化技术，把全局球面参数化问题转换为局部参数化问题。实验证明我们的球面参数算法是目前最强壮、速度最快的。为了生成累进网格，作者还提出了一种基于边折叠的保面积网格简化算法，这种算法在简化率很高时还能生成较高质量的简化网格。另外，结合保角映射和调和映射技术，本章还给出了一种新的局部参数化算法。最后，本章讨论了均匀参数化的问题，并指出参数化能均匀化的程度和网格的拓扑连接有很大的关系。

第四章首先从信号处理理论出发分析了参数化对信号频谱能量分布的影响，指出非均匀的参数化会导致转换到参数域的信号的能量发生频谱迁移；然后指出 DGP 本质上包含了两个问题（参数化和采样），如果无法构造均匀参数化，可以在采样阶段来解决这个问题；最后介绍我们设计的保频谱的自适应采样算法。

第五章介绍在上述 DGP 框架下的各种几何信号处理应用，包括滤波和增强、细节和纹理传输、多分辨率编辑以及三维变形。这章给出的大量实验结果说明本文框架的强壮性和通用性。

尽管几何信号压缩在前面介绍的 DGP 框架下也可以很好地实现，第六章还给出了一种更高效的压缩算法。通过把第二章介绍的参数化算法和第三章介绍的自适应采样算法推广到平面上，任意网格信号都可以被转换为二维图像，然后我们采用 JPG2000 来压缩这样的图像。这种方法和几乎同时提出来的几何图像 [Gu2002] 很相似。

最后我们总结全文工作并介绍将来的研究方向。

注：本文后面章节提到的一些动画演示文件都可以在伴随论文的光盘中找到，或者发电子邮件给作者 kunzhou@cad.zju.edu.cn。

第二章 统一的数字几何处理框架

本章概述我们提出的数字几何处理框架。为了描述方便，第一节先定义本文用到的一些术语；第二节简要描述本文框架处理亏格为零的网格模型的流程，包括球面参数化、采样和精度控制、球面调和分析与快速球面调和变换以及如何重建几何信号；第三节通过一些数据说明整个 DGP 框架的运行时间效率；第四节介绍本文框架如何通过切割来处理亏格非零的网格；第五节分析本文 DGP 框架的特性；最后是小结。

2.1 基本定义

2.1.1 三角形网格

三角形网格模型 M 表示为三元组：

$$M = (V_M, K_M, P_M)$$

其中

$$V_M = \{1, 2, \dots, |M|\}$$

是 M 的顶点集合 ($|M|$ 表示顶点数目)； K_M 是包含 M 中所有拓扑连接关系的集合； P_M 为 M 中所有顶点的属性向量集合：

$$P_M = \{\theta(i) \mid i \in V_M\}$$

其中 $\theta(i) = (f_1(i), f_2(i), \dots, f_n(i))$ 表示顶点 $\{i\}$ 的 n 个属性值，包括位置坐标，法向量和颜色等，显然 P_M 包含了 M 的所有几何信息。

K_M 的元素分三种类型：顶点 $\{i\}$ ，边 $e = \{i, j\}$ 和面 $f = \{i, j, k\}$ 。如果 $\{i, j\} \in K_M$ ，则顶点 $\{i\}$ 和 $\{j\}$ 被称为邻居。顶点 $\{i\}$ 的 1 环邻居被定义为 $N(i) = \{j \mid \{i, j\} \in K_M\}$ ，顶点 $\{i\}$ 的入度 (Valence) 被定以为 $N(i)$ 中的元素个数 $|N(i)|$ ，边 $e = \{i, j\}$ 的 1 环邻居被定义为 $N(e) = N(i) \cup N(j) - \{i, j\}$ 。依此类推，设共享顶点 $\{i\}$ 的所有三角形集合为 $T(i) = \{f \mid i \in f, f \in K_M\}$ ，则 $T(e) = T(i) \cup T(j)$ 。顶点 $\{i\}$ 的星形邻域 (Star) 被定义为 $Star(i) = \bigcup_{i \in s, s \in K_M} s$ ， $Star(e) = Star(i) \cup Star(j)$ 。

和大多数处理网格模型的算法一样，本文也只处理流形网格，即网格中每个顶点的 1 环邻居 $N(i)$ 构成一个顶点环 (这样的顶点被称为内部顶点) 或半环 (边界顶点)。对于非流形网格，必须先通过预处理转化为流形。

顶点 $\{i\}$ 处的顶点分布密度被定义为:

$$D_M(i) = \frac{|N(i)|+1}{\sum_{\Delta \in T(i)} \text{Area}(\Delta) / \text{Area}(M)} \quad (2.1)$$

其中 $\text{Area}(M)$ 表示网格 M 的所有三角形面积之和,

2.1.2 几何信号

网格 M 表面上的几何信号 F_M 被定义为由网格 M 的顶点属性集合 P_M 插值得到的分段线性函数。对网格 M 表面上的任意一点 p , 几何信号 $F_M(p)$ 定义为:

$$F_M(p) = \text{Span}(P_M)(p) = \begin{cases} \theta_M(p) & \text{如果 } p = \{i\} \in K_M \\ \alpha\theta_M(i) + \beta\theta_M(j) + \gamma\theta_M(k) & \text{否则设 } p \text{ 位于 } M \text{ 的某个三角形} \\ & \{i, j, k\} \text{ 中, } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ 为质心坐标} \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.3 同构映射和同形映射

如果两个网格 M 和 S 的拓扑连接关系相同, 即存在从 K_M 到 K_S 的一一映射 Γ_{M-S} , 则称 M 和 S 是拓扑同构 (Graph-isomorphic) 的, Γ_{M-S} 被称为从 M 到 S 的同构映射。为任意网格 M 构造球面参数化就是构造要构造一个与 M 拓扑同构的球面网格。通过拓扑同构映射 Γ_{M-S} , 原来定义在网格 M 表面上的几何信号就被转换为网格 S 表面上的信号:

$$F_S(q) = \text{Span}(P_S)(q) \quad (2.3)$$

其中 $P_S = \{P_M(\Gamma_{M-S}^{-1}(i)) \mid i \in V_S\}$, q 是网格 S 上的任意一点。

类似的, 我们可以定义同形映射 (Homeomorphous Map)。如果对网格 M 表面上的任意一点, 在网格 W 表面上有唯一的一点与其对应, 反之亦然, 则称这种从网格 M 到网格 W 的映射 Ω_{M-W} 为同形映射。例如任意两个单位球面网格之间的投影映射就是同形映射。通过同形映射, 定义在网格 M 表面上的几何信号也可以被转换为网格 W 表面上的信号:

$$F_W(q) = \text{Span}(P_W)(q) \quad (2.4)$$

其中 $P_W = \{P_M(\Omega_{M-W}^{-1}(i)) \mid i \in V_W\}$, q 是网格 W 上的任意一点。

2.1.4 亏格

另外, 如果网格 M 是封闭的 (即所有顶点都是内部顶点), 设其顶点数、边数和三

角形数分别为 N_v 、 N_e 和 N_f ，其亏格（Genus） G 可定义如下：

$$G = (N_e - N_v - N_f + 2) / 2$$

任意球面网格的亏格都为 0，环的亏格为 1。图 2.1 给出了亏格为 0、1 和 2 的几个网格模型例子。

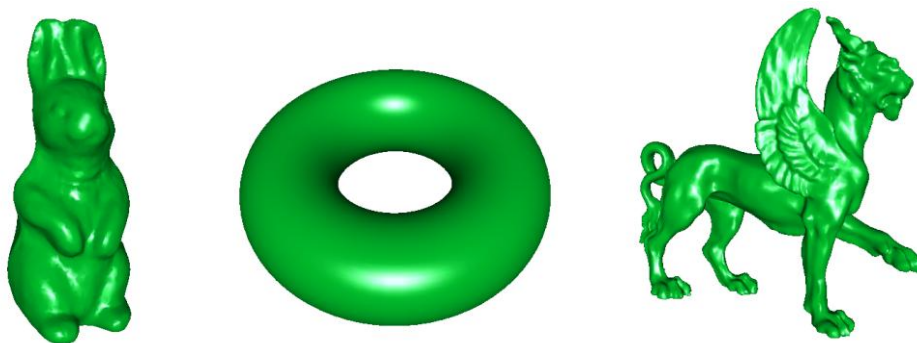


图 2.1 亏格分别为 0、1 和 2 的网格模型

2.2 框架概述

本节假设模型都是封闭的，并假设其亏格为零。对于有边界的网格，需要先把边界闭合起来。后面我们会介绍如何处理亏格非零的模型。根据拓扑学理论，亏格为零网格一定存在拓扑同构的球面网格。

本文 DGP 框架的核心思想是用单位球面来代替复杂的网格表面作为几何信号的定义域，这样适用于球面的一些正交分析工具（如球面调和分析和小波分析）就可以被用来处理几何信号。

如图 2.2 所示，本文 DGP 框架处理几何信号的流程总体上分为 5 步：（1）球面参数化（Spherical Parameterization），通过为任意网格构造一个拓扑同构的球面网格，定义在原网格表面的信号就被转换为定义在球面网格上的球面信号；（2）采样（Sampling），对参数化得到的球面信号沿经纬方向均匀采样；（3）球面调和变换（SHT-Spherical Harmonic Transform），用快速调和变换把采样得到的规则球面信号分解到频率域；（4）信号处理（Processing），在频率域对信号进行处理，如滤波、增强和卷积等；（5）信号重建（Signal Reconstruction），从处理后的频谱中重建几何信号，包括球面调和逆变换、反采样和参数化逆映射。

下面我们简要介绍上述流程中的关键步骤。由于信号处理属于 DGP 应用，第五章会详细描述，这里就不介绍了。

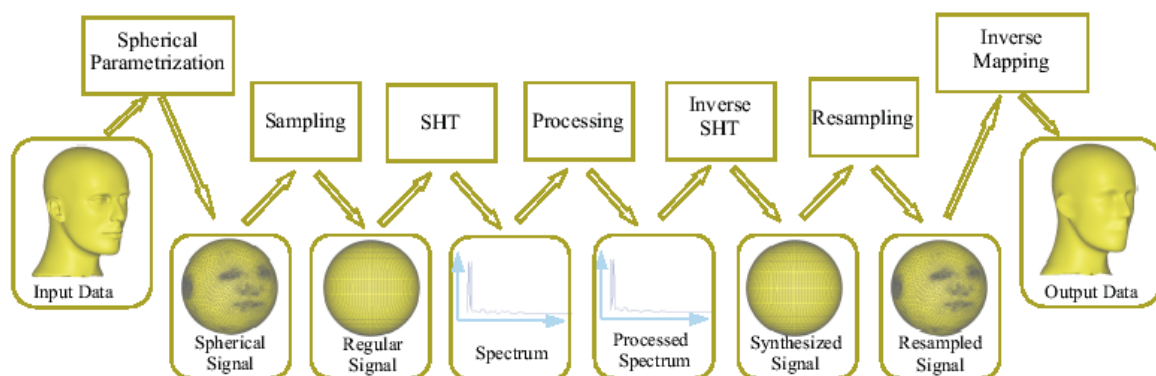


图 2.2 统一的几何信号处理框架流程图

2.2.1 球面参数化

作为原始几何信号定义域的网格表面通常是任意复杂的，这也就是几何信号处理最大的困难。与基于子分网格的 DGP 算法使用基网格和几何图像使用平面作为参数化域（即新信号的定义域）不同，我们采用单位球面。对亏格为零的网格模型来说，球面是最自然的参数化域。球面参数化的目的就是为任意网格 M 构造一个拓扑同构的单位球面网格 S ，通过公式 (2.3)，把定义在原网格 M 表面的信号 F_M 转换为定义在球面网格 S 表面上的球面信号 F_S 。图 2.3 给出了 VenusHead 模型的球面参数化，并显示了转化到该球面网格上的位置坐标信号和法向量信号。图 2.4 给出了 Bunny 模型的球面参数化，并显示了转化到该球面网格上的颜色信号。

为了保证后面采样和反采样阶段的唯一性，球面参数化网格必须满足星形的要求，即从球心出发的任意一条射线和球面网格有且仅有一个交点。第三章会详细描述我们提出的累进球面参数化算法。

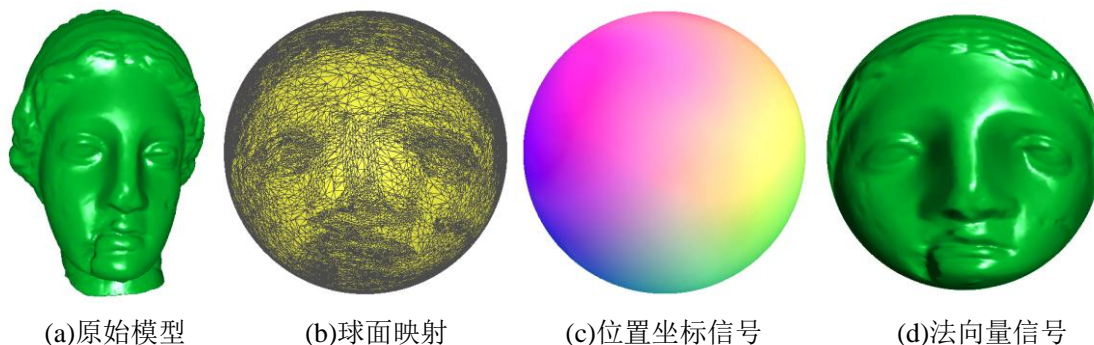


图 2.3 VenusHead 模型球面参数化及球面信号

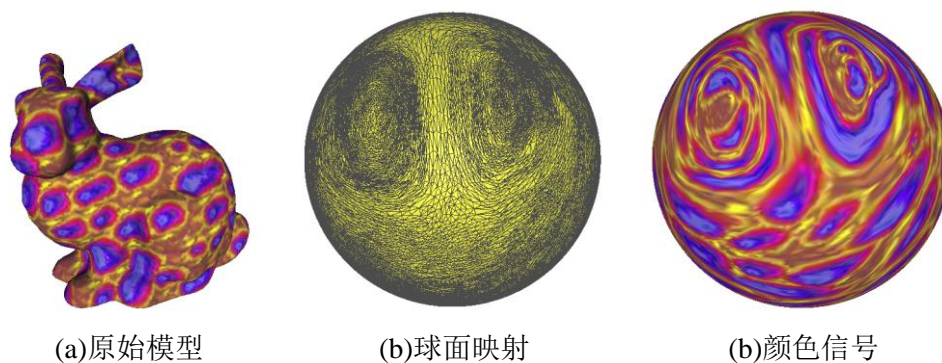


图 2.4 Bunny 模型球面参数化及颜色信号

2.2.2 球面调和分析与快速球面调和变换

球面调和分析也被称为单位球面上的二维 Fourier 分析。这种分析工具在化学、天文学和生物学等学科中已经得到广泛地应用。在计算机图形学中，调和分析通常被用在与 BRDF 和辐射度相关的一些研究中。以 BRDF 为例， $f_r(\bar{\omega}_i, \bar{x}, \bar{\omega}_o)$ 描述模型表面任意一点 \bar{x} 上入射辐射度 $\bar{\omega}_i$ 和出射辐射度 $\bar{\omega}_o$ 之间的关系，这可以用球面调和函数 (Spherical Harmonics) 来描述。最近，球面调和分析还被用在反向绘制框架中 [Ramamoorthi2001]。本文采用调和分析来分析定义在单位球面上的几何信号。

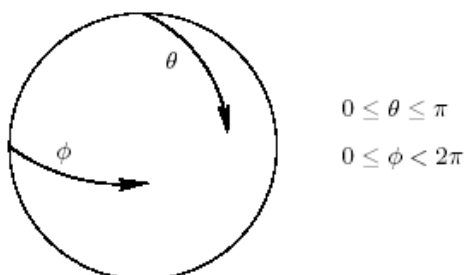


图 2.5 单位球面坐标系

众所周知，单位球面上任意点的位置 p 都可以用经度角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 和纬度角 ϕ ($0 \leq \phi < 2\pi$) 来确定 (图 2.5)， $p = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$ 。因此，任意球面信号都可以表示为二维连续函数 $f(\theta, \phi)$ 。球面函数 $f(\theta, \phi)$ 和 $h(\theta, \phi)$ 的内积定义如下：

$$\langle f, h \rangle = \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi) h^*(\theta, \phi) d\phi \right] \sin \theta d\theta$$

其中 h^* 表示 h 的共轭。

和平面上的 Fourier 分析以三角函数系为基函数不同，球面调和分析的基函数 (也被称为球面调和函数) 为：

$$Y_l^m(\theta, \phi) = k_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$m = -l, -l+1, \dots, l-1, l; \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $k_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ 是归一化常数, $P_l^m(x)$ 是度 (Degree) 为 l , 次 (Order) 为 m 的联合 Legendre 多项式 (Associated Legendre Polynomial)。球面调和函数来自球面上的 Laplacian 方程, 它们构成了球面连续函数空间中的一组完备的单位正交基, 即:

$$\langle Y_l^m, Y_k^n \rangle = \delta_{l,k} \delta_{m,n}$$

$$\text{其中 } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

因此, 任意定义在球面上的连续函数 $f(\theta, \phi)$ 都可以用球面调和函数展开:

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \hat{f}(l, m) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.5)$$

其中 $\hat{f}(l, m)$ 为 $f(\theta, \phi)$ 和 $Y_l^m(\theta, \phi)$ 的内积, 被称为 (l, m) -Fourier 系数:

$$\hat{f}(l, m) = \langle f, Y_l^m \rangle = k_{l,m} \int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} e^{-im\phi} f(\theta, \phi) d\phi \right] P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (2.6)$$

式 (2.5) 也被称为函数 $f(\theta, \phi)$ 的调和级数展开。类似于平面 Fourier 分析, 系数 $\hat{f}(l, m)$ 的模长表示函数 $f(\theta, \phi)$ 在频率 (l, m) 处能量的大小, 并且满足:

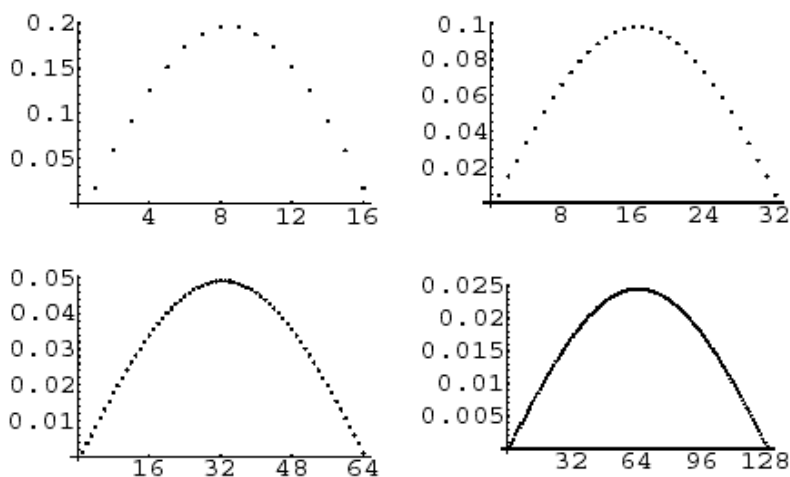
$$\sum_{l,m} \|\hat{f}(l, m)\|^2 = \|f\|^2$$

如果存在着某个正数 $B > 0$ 使得对所有的 $l > B$ 都有 $\hat{f}(l, m) = 0$, 则称 $f(\theta, \phi)$ 是带宽有限的函数, 或者说 $f(\theta, \phi)$ 的带宽为 B 。由 Nyquist 采样定律, 对带宽为 B 的二维信号, 只需要 $2B \times 2B$ 的采样数据就可以完全恢复原信号。因此, 设 $f(\theta, \phi)$ 的带宽为 B , 式 (2.6) 中的积分运算可以简化为 $2B \times 2B$ 的采样数据的加权和:

$$\hat{f}(l, m) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \sum_{j=0}^{2B-1} \sum_{k=0}^{2B-1} a_j^{(B)} f(\theta_j, \phi_k) e^{-im\phi_k} P_l^m(\cos \theta_j) \quad (2.7)$$

其中采样点 $\theta_j = \pi(2j+1)/4B$, $\phi_k = 2\pi k/2B$, 权值 $a_j^{(2B)}$ 的作用类似于积分运算中的 $\sin \theta$ (如图 2.6)。

式 (2.7) 就是球面函数 $f(\theta, \phi)$ 的离散 Fourier 变换。显然直接计算上式需要 $4B^2$ 次运算, 计算 B^2 个系数的时间复杂度为 $O(B^4)$ 。通过变量分离, 先用 FFT 计算出只依赖于 j 和 m 的内部指数和, 然后对给定的 $m > 0$ 计算下面的离散 Legendre 变换 (Discrete Legendre-transforms):

图 2.6 权值 $a_j^{(2B)}$ 在不同带宽下的取值

$$\sum_{k=0}^{2B-1} [s]_k P_l^m(\cos \theta_k) = \langle s, P_l^m \rangle \quad (2.8)$$

其中 $l = m, m+1, \dots, 2B-1$ 。这样 (2.7) 式的计算复杂度减少为 $O(B^3)$ 。研究人员还开发了一种快速离散 Legendre 变换 [Healy1996], 其计算复杂度减少为 $O(B^2 \log^2 B^2)$ 。这样我们就得到了快速球面调和变换, 其时间复杂度为 $O(B^2 \log^2 B^2)$ 。

同样的, 球面调和逆变换

$$f(\theta_j, \phi_k) = \sum_{l=0}^{B-1} \sum_{|m| \leq l} c_{l,m} Y_l^m(\theta_j, \phi_k) \quad (2.9)$$

也有快速计算方法, 时间复杂度也是 $O(B^2 \log^2 B^2)$ 。

上面的讨论都假设函数 $f(\theta, \phi)$ 为标量函数, 在我们的 DGP 框架中, 通过参数化转换到球面上的几何信号 F_S 都是高维的, 例如位置坐标就包括 XYZ 三个分量, 颜色包括 RGB 三个分量。尽管球面调和函数可以处理球面上张量场 (Tensor Field) [Kostelec2002], 为了降低算法的复杂度, 本文简单地把几何信号的每个分量单独当作标量函数处理。从实验数据来看, 这种处理方法也能取得较好的结果。

2.2.3 采样与误差控制

根据式 (2.7), 为了能使用快速球面调和变换来分解球面信号 F_S , 必须在经纬方向做均匀采样。由于我们处理的几何信号 (参见式 (2.2)) 是分段线性函数, 很难估计其带宽。在给定的采样率下, 从采样信号重建回来的信号 F_S' 与原信号 F_S 之间就存在差值, 这个差值被称为采样误差。可以通过下式来计算 L^∞ 误差:

$$d(F_S, F_S') = \max_{i \in V_S} \|F_S(\{i\}) - F_S'(\{i\})\| \quad (2.10)$$

我们采用下面逐步求精的方法来控制采样误差：

- Step 1: 设置初始采样率为 64×64 。
- Step 2: 在当前采样率下计算所有采样点的信号值，得到均匀采样信号 F_U 。
- Step 3: 从均匀采样信号 F_U 中反插值计算出定义在球面参数网格上的信号 F_S' 。
- Step 4: 计算采样误差 $d(F_S, F_S')$ 。
- Step 5: 如果 $d(F_S, F_S')$ 小于用户指定的精度要求 ε ，转 Step 7，否则转 Step 6。
- Step 6: 增加采样率，转 Step 2。
- Step 7: 结束。

显然，如果不记时间和空间代价，上面的均匀采样策略一定能保证采样误差小于用户指定的精度要求。表 2.1 给出了几个典型模型的位置坐标信号在不同采样率下的采样误差，表中给出的数字都是误差值相对于模型包围盒对角线的百分比。第四章会详细介绍表中提到的自适应采样策略。

表 2.1 采样率和采样误差 (%)

| 采样率 | 均匀采样 | | | 自适应采样 | | |
|-----------|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------|
| | Cat | Mannequin | VenusHead | Dino | Bunny | Horse |
| 128×128 | 1.189 | 1.242 | 0.544 | 1.148 | 2.048 | 1.819 |
| 256×256 | 0.856 | 0.924 | 0.281 | 0.912 | 0.836 | 1.256 |
| 512×512 | 0.614 | 0.618 | 0.149 | 0.769 | 0.717 | 1.157 |
| 1024×1024 | 0.249 | 0.325 | 0.123 | 0.718 | 0.667 | 1.121 |

在计算球面上均匀采样点 (θ_j, ϕ_k) 的信号值时，我们采用质心坐标线性插值的方法。如果球面参数化网格 S 是封闭的，则球面参数化算法能保证从球心到采样点 $(\cos \phi_k \sin \theta_j, \sin \phi_k \sin \theta_j, \cos \theta_j)$ 的射线和球面网格 S 有且只有一个交点 p ，采样点的信号值为 $F_U(\theta_j, \phi_k) = F_S(p)$ 。如果球面网格 S 不是封闭的，且采样点 $(\cos \phi_k \sin \theta_j, \sin \phi_k \sin \theta_j, \cos \theta_j)$ 位于 S 的边界外，则需要计算 S 边界上距离采样点最近的点 q ，并取该点的信号值 $F_S(q)$ 作为采样点的信号值。

2.2.4 信号重建

信号重建过程比较简单，包含上面 2.2.1、2.2.2 和 2.2.3 小节的逆过程：首先把处理后的频谱系数用快速球面调和逆变换转换为球面上均匀采样的信号，然后插值计算出参数化球面网格上每个顶点的信号值，最后用参数化的逆映射得到原网格模型每个顶点的信号值。因此，本文 DGP 框架的输出模型与原模型具有相同的拓扑连接。

在计算球面参数化网格上每个顶点的信号值时，我们一般取顶点所在栅格的四个采样点来插值。对位于南北极附近的顶点，则取顶点所在的三角形的三个采样点（南/北极点加上另外两个采样点）来插值。

2.3 框架时间效率

通过 2.2 节中介绍的框架流程，任意亏格为零的网格表面上的几何信号都可以被分解到频率域，再从处理后的频谱系数合成出新的几何信号。大量的实验数据表明该框架的时间效率是比较高的。表 2.2 给出了本文框架处理 6 个典型网格模型的位置坐标信号的运行时间（以秒为单位）。所有数据都是在 Pentium III 600MHz，512M 内存的微机上调统计出来的。

表 2.2 DGP 框架流程运行时间统计

| 采样策略 | 均匀采样 | | | 自适应采样 | | |
|--------|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| 模型 | Cat | Mannequin | VenusHead | Dino | Bunny | Horse |
| 三角形数 | 8976 | 13472 | 100000 | 47858 | 69473 | 96966 |
| 封闭 | 否 | 否 | 是 | 是 | 否 | 是 |
| 采样率 | 256×256 | 256×256 | 256×256 | 256×256 | 512×512 | 256×256 |
| 时间 (秒) | | | | | | |
| 参数化 | 86 | 137 | 691 | 867 | 1162 | 1755 |
| 分析/合成 | 4 | 4 | 5 | 5 | 35 | 4 |
| 插值 | 1 | 1 | 2 | 58 | 25 | 690 |
| 总计 | 91 | 142 | 698 | 930 | 1222 | 2449 |

从表 2.2 可以看出，对 10 万个三角形的 VenusHead 模型，整个算法运行一遍只需要 10 多分钟，而对另外一个将近 10 万个三角形的 Horse 模型，算法运行一遍却需要 40 分钟。这是主要由于 Horse 模型的形状比 VenusHead 模型复杂，球面参数化需要的时间要长得多。注意到，对所有模型来说，DGP 流程中参数化过程耗费了大部分时间。一方面本文下章将要介绍的球面参数化算法在目前的实现中还没有进行任何优化，因此，这部分速度还可以有大幅度的提高。另一方面，由于参数化只是整个 DGP 框架中的预处理过程，并不需要实时进行，因此目前的运行速度还是可以接受的。

2.4 处理亏格非零的网格

前面章节介绍的 DGP 框架都是针对亏格为零的网格模型。亏格非零的网格模型和球不同胚，因此无法直接把这类网格参数化到球面上去，上述 DGP 框架也就无法直接

适用到这类网格模型。

一个很直接的方法是先交互地把亏格非零的网格切割成亏格为零的网格，并把边界封闭起来，这样生成的网格就可以在上述 DGP 框架下处理了，处理完后再把切割边界合并起来。如图 2.7(a)所示的亏格为 2 的 Feline 模型，我们沿着尾巴上的两条闭合路径将其切割为亏格为零的网格。图 2.7(b)给出了其球面参数化网格。图 2.7(c)是对切割后的模型进行低通滤波处理的结果，从 2.7(d)对尾巴部分的放大可以看到到处理后的切割边界不再吻合，而且不光滑。图 2.7(e)是直接合并边界后的结果，2.7(f)是局部放大图。

就象几何图像切割网格模型会带来边界不光滑的问题一样，这种切割的方法也会造成切割边界的不光滑，从图 2.7(f)不难看出这一点。为了解决切割边界的不光滑性，我们对切割边界附近的顶点实施若干次 Laplacian 平均算子就可以得到边界比较平滑的模型。图 2.7(g)就给出了平滑处理后的结果，不难看出图 2.7(h)比图 2.7(f)要光滑得多。

尽管上述在切割边界局部范围内取 Laplacian 平均的方法可以得到视觉上比较光滑的模型，但还是无法保证切割边界的光滑性。在这一点上，本文 DGP 框架就象几何图像在切割边界和子分网格算法在基网格边界上一样无法证明边界的光滑性。但这个局限性并不妨碍本文算法在实际中的应用。

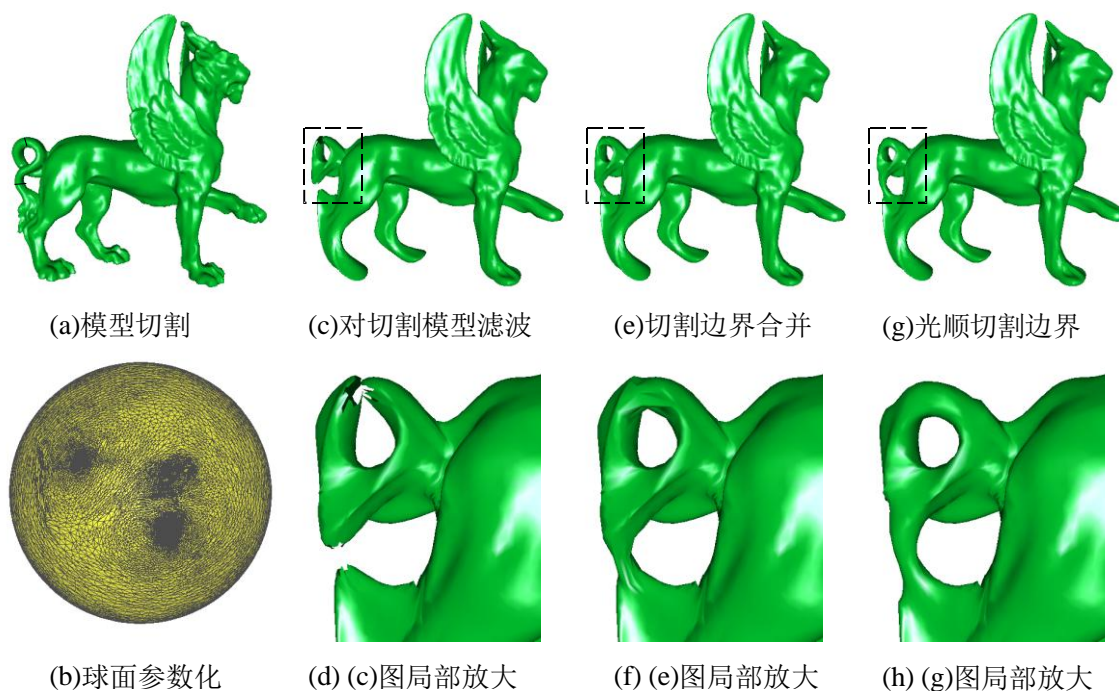


图 2.7 处理亏格非零的网格模型

2.5 分析讨论

从前面章节的介绍可以看出，本文 DGP 框架的核心思想是通过球面参数化把原来定义在任意网格表面的几何信号转换到单位球面上去，这样球面上的分析工具就可以被用来分析这些几何信号。换言之，正是观察到 DGP 的最大难点在于任意网格表面的

复杂性，我们才通过单位球面这个规则的定义域来替代任意网格表面，使得经典的 Fourier 分析能被用来处理几何信号。

与现有的 DGP 算法比较，本文 DGP 框架具有如下优越性：

- 1) 一致的参数域：所有的模型都被参数化到单位球面上，所有的几何信号都定义在单位球面上，也就是说任意模型的任意几何信号都共享同一个参数域—单位球面；这就类似于所有的图像都共享统一的平面定义域，使得包括多个模型的 DGP 应用变得很容易。而基于子分网格的 DGP 算法的信号参数域（基网格）依赖于不同的模型，一致的基网格是很难构造的；几何图像的参数域尽管统一，但自动切割后不同模型参数域很难对齐。
- 2) 坚实的理论基础：球面调和函数分析保证本文 DGP 框架下的频率是真正 Fourier 意义上的频率，频率分解和信号合成的光滑性能很好地证明；尽管处理亏格非零的网格时无法保证切割边界的光滑性，但这并不掩盖本文算法的优越性：一方面，切割边界可以通过局部区域的 Laplacian 平均算子来达到视觉上的光滑性；另一方面，相对于基于子分网格的 DGP 算法的基网格边界和几何图像的切割边界，我们的切割边界要少得多。
- 3) 所有信号的统一处理：在本文框架下，所有的网格属性（如位置坐标、颜色和法向量等等）都被转化为球面上的标量信号统一处理。据我们所知，目前只有几何图像给出了对各种属性数据压缩的结果，其它的 DGP 算法都只给出了处理位置坐标的实验结果。
- 4) 空域和频域之间的自由切换：通过球面参数化和球面调和函数分析，任意几何信号可以根据应用需要在空间域和频率域之间自由切换；在这一点上，本文框架所起的作用类似于数字图像处理中的 Fourier 分析，而以前的 DGP 算法都不具备这个特性。第五章将会介绍的多分辨编辑应用很好地说明了这一点。
- 5) 通用性：在本文框架下，大部分 DGP 应用都能很方便地实现。第五章我们会介绍包括滤波、增强、卷积、编辑等在内的多个应用。

下面讨论一下我们在设计本文 DGP 框架时一些思路的出发点：

(1) 为什么选择单位球面作为参数域？

平面和球面都是数学上最简单的定义域，在平面和球面上都有比较成熟的数学分析工具。因此，在简化几何信号的原始定义域（即网格模型的表面）时首先应该考虑的就是平面和球面。众所周知，数字图像处理技术已经非常成熟，所以平面比球面更具优越性。但把任意网格参数化到平面上需要对网格做复杂的切割，切割边界的光滑性是很难保证的，这就是几何图像方法一般只能用于压缩几何信号的原因。而对于亏格为零的模型，球面是最自然的参数域，无需任何切割；对亏格非零的网格，虽然也需要切割，但

切割边界比较少；所以我们选择球面作为参数域。

(2) 为什么用球面调和和分析而不用球面小波作为分析工具？

事实上在完成球面参数化后，球面调和分析和球面小波都可以被用来分析处理球面信号。就象在数字图像处理领域，Fourier 变换、小波变换以及离散余弦变换 DCT 适用于不同的图像处理应用，球面调和分析和球面小波也适用于不同的几何处理应用。调和和分析本质上是 Fourier 分析，主要在滤波器设计、去噪声等领域；球面小波主要用于几何数据压缩。作为 DGP 的理论框架，我们主要介绍了球面调和和分析，对球面小波有兴趣的读者可以参考文献 [Schröder95]。

(3) 为什么要保持处理后网格模型的拓扑连接和原网格一致，而不重采样？

这里就涉及到一个问题，网格模型的拓扑连接信息到底有没有用？以加州理工为代表的支持子分网格 DGP 算法的学者认为网格模型的拓扑连接只是代表一种采样模式，对几何信号没有贡献；因此，他们通过重采样用具有子分连接关系的网格来逼近原始网格。而 Taubin 推广到三维网格的 DFT 则完全基于拓扑连接关系，拓扑连接某种程度上来说决定了什么是低频什么是高频；从实验结果来看，这种拓扑连接空间中的高低频在一定程度上和人们的直观理解是吻合的。还有一些学者则公开提出拓扑连接信息里包含了一定的几何形状信息 [Isenburg2001]，并且给出了大量的仅仅从拓扑连接信息中构造出来的和原模型非常相近的模型。

基于上面的讨论，本文框架采取了保持原模型拓扑连接的策略。当然，本文框架也能很方便地支持重采样。图 2.8 给出了对本文框架对 Planck 人头模型进行重采样的例子。

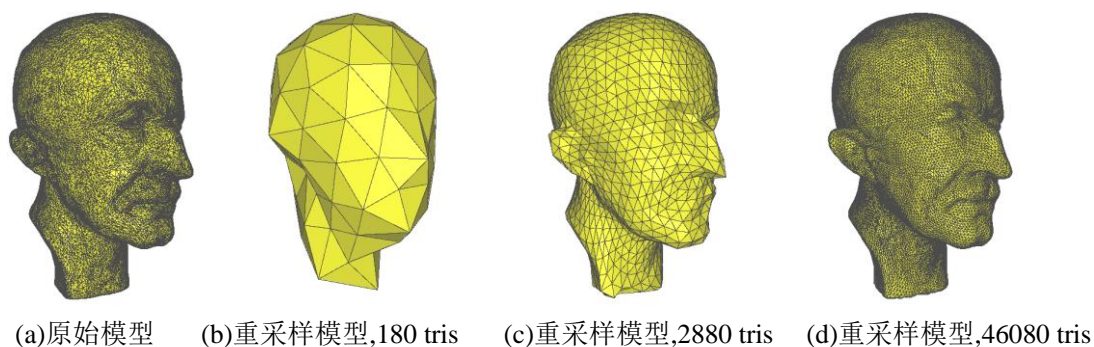


图 2.8 Planck 模型子分重采样

2.6 小结

本章概述了我们提出的统一的数字几何处理框架。基于球面参数化和球面调和和分析，该框架能使 DGP 应用在几何信号的空间域和频率域之间自由切换。从这个意义上说，本文框架可以构成大多数 DGP 应用的基础，这在一定程度上也就回答了数字几何

处理领域的难题。从实验数据来看，整个框架的时间效率还是比较高的。另外，通过切割和局部 Laplacian 加权平均技术，本文框架也能处理亏格非零的网格模型。当然，切割边界的光滑性很难保证，这也是本文框架的局限性。

第三章 累进的球面参数化算法

从上章对本文 DGP 框架的概述中不难理解球面参数化算法在框架中的重要性，本章介绍我们提出的基于累进网格技术和局部参数化技术的球面参数化算法。首先，第一节简要介绍网格参数化方面的相关工作；第二节给出算法的详细描述，包括算法中的一些关键技术，如保面积简化算法、局部参数化方法等等；第三节介绍算法实现，并给出了一些的实验结果；第四节讨论网格的拓扑连接对参数化均匀性的影响；最后是小结。

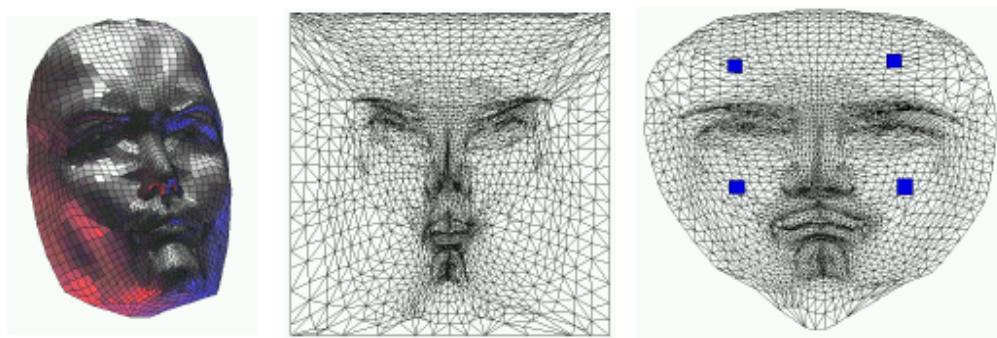
3.1 相关工作

参数化作为很多图形学应用（如纹理映射、网格变形、数字几何处理等）的关键技术一直是计算机图形学的一个重要研究方向。近年来关于网格参数化的文献很多，根据参数域的不同我们可以把它们分为三大类：网格片的平面参数化（Chart Parameterization）、基网格上的参数化和球面参数化。

3.1.1 网格片的平面参数化

网格片的平面参数化是目前研究得最多的参数化算法 [Bennis1991, Campagna1998, Desbrun2002, Eck1995, Floater1997, Floater2001, Gu2002, Hormann2000, Hormann1998, Lévy1998, Lévy2001, Litwinowicz1994, Ma1998, Maillot1993, Sander2001]，其目的是把网格片尽可能均匀地摊平到某个平面区域中。这些算法的基本思想是定义一个衡量参数化伸缩变形程度的目标函数，然后通过最小化目标函数来构造所谓的均匀参数化。

Maillot 和 Yahia 在交互式纹理映射算法中最先提出基于弹性理论的变形度量 [Maillot1993]。在该算法中，网格表面被假想为由很多橡皮块沿公共边缝接组成，他们的目标函数尽可能保持网格中所有边的长度。Eck 等人也基于弹性理论给出了调和映射的一种分段线性逼近 [Eck1995]。与 [Maillot1993] 方法中每条边的权值为边长不同，他们的权值依赖于边长和共享该边的三角形面积。由于 [Eck1995] 中边的权值可能为负，这使得该算法不能保证网格内部的顶点完全嵌入边界顶点确定的平面多边形区域。Floater 等人开发了一种新的权值方法来确保这种嵌入 [Floater1997]。前面几种变形度量都是线性函数，Sander 等人设计了两种非线性的变形度量来最小化网格表面上任意点在所有方向上的参数化伸缩变形 [Sander2001]。当然，优化这种目标函数的代价要远远高于以前的线性目标函数。Hormann 等人 [Hormann1998] 注意到前人的参数化算法都需要预先固定网格的边界顶点不动，这大大减少了参数化网格的伸缩自由度，通过让边



(a)人脸模型

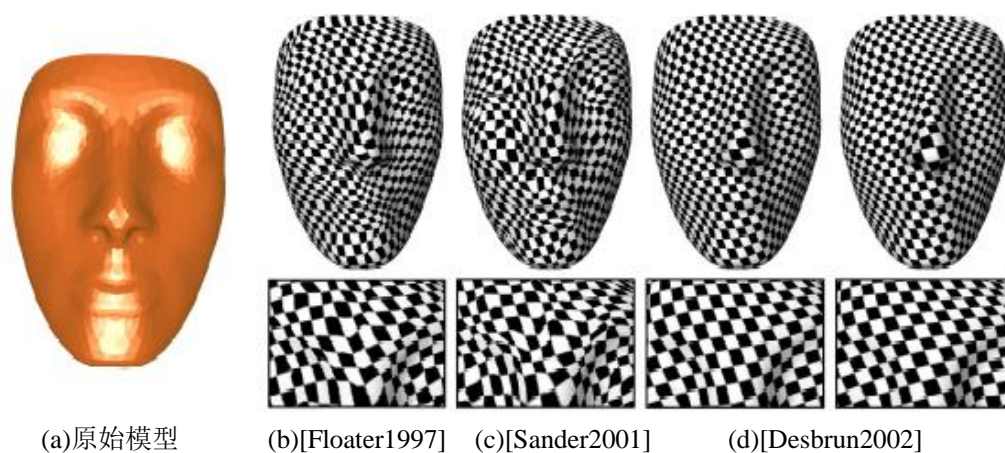
(b)边界固定参数化

(c)边界自由扩展参数化

图 3.1 边界固定和不固定参数化对比

界顶点自由扩展能得到变形很小的参数化。图 3.1 给出了一个人脸模型边界固定和边界不固定的参数化例子，显然后者的变形要小于前者。

最近，Desbrun 等人从离散微分几何出发，通过最小化网格表面某些本质度量的参数化变形，提出了网格的本质参数化算法（Intrinsic Parameterization）[Desbrun2002]。无论从理论上还是实践上，这种网格的本质参数化算法是目前最好的网格片的平面参数化。图 3.2 给出了几种平面参数化算法的对比，其中第二排显示了眼睛和鼻子部分的局部放大效果，显然 [Desbrun2002] 方法的变形程度要小得多。



(a)原始模型

(b)[Floater1997]

(c)[Sander2001]

(d)[Desbrun2002]

图 3.2 几种平面参数化算法对比

3.1.2 基网格上的参数化

构造基网格上的参数化的最早目的是为了进行子分重采样 [Eck1995, Lee1998]。后来这种参数化方法被用来构造法向网格 [Guskov2000] 和构造一致的网格参数化 [Praun2001]。这部分内容在第一章绪论部分已经介绍过，这里就不重复了。

3.1.3 球面参数化

相对于大量的网格平面参数化算法，球面参数化的研究显得较少。这一方面是因为为网格构造球面参数化的作用不明显；另一方面是球面参数化问题比平面参数化问题难，平面参数化中那些线性的参数化变形度量都无法用来构造一个正确球面参数化。从我们搜集到的文献和 Internet 上搜索的结果，目前只有 3 种为三角形网格模型构造球面参数化的方法；其中两种方法用于网格变形 [Alexa2000a, Shaprio1998]，另外一种方法用于从拓扑连接构造模型 [Isenburg2001]。

Shaprio 和 Tal 提出的球面参数化算法由两步组成：（1）简化：删除入度小于 6 的顶点并重新三角化由此生成的空洞，直到当前简化网格为四面体为止；（2）顶点附加：以逆序把删除的顶点重新附加到当前的凸多面体上，直到原模型所有的顶点都映射到凸多面体上。尽管在该文献中，作者用了很大篇幅来证明如果每次都只删除入度小于 6 的顶点，则在顶点附加阶段可以设计较好的顶点放置方法来保持当前多面体为凸；实际上，作者的证明是不严谨的。以图 3.3 算法处理入度为 3 的顶点为例，作者只考虑了邻接三角形 F_1, F_2 和 F_3 ，事实上，所有和顶点 V_1, V_2 和 V_3 相关的三角形都必须考虑。对入度为 4 和 5 的顶点，需要考虑的情况更多。从原文中只给出了非常简单的实验结果也不难看出来这种方法不强壮。

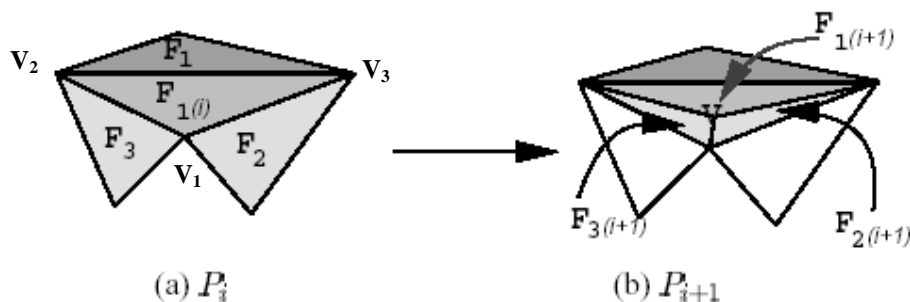


图 3.3 入度为 3 的顶点附加过程

Alexa 给出了一种很简单的球面参数化算法：首先把网格的所有顶点投影到模型的最小包围球面上；然后保持球面上 6 个顶点的位置不动，用离散 Laplacian 平均算子来松弛球面的其它顶点，直到球面网格变成星形。正如作者指出的那样，这种先简单投影然后松弛的方法对形状比较复杂的模型需要多次循环（原文中给出的一个例子需要松弛迭代 10000 次）。因此，这种方法的时间代价很高。另外这种方法也无法保证松弛过程的收敛性，算法的稳定性还有待进一步提高。

Isenburg 等人在直接从拓扑连接构造三维形体的算法中采用球面网格作为初始形体，因此他们也附带给出了一个直观的直接从拓扑连接中生成球面网格的算法。其基本思想是：首先根据拓扑连接把网格模型分割成近似相等的两部分；然后每部分被分别参数化到一个平面圆盘区域，进而被投影到一个半球面上；最后两个半球面网格沿着相同的切割边界合并成一个球。这个方法最大的问题是网格切割和圆盘参数化的代价太高，另外生成的球面网格很不均匀。

到目前为止，如何高效率地为任意亏格为零的网格模型构造球面参数化仍然是具有挑战性的问题。

3.2 算法描述

我们的球面参数化算法和 [Shapiro1998] 一样也分为简化和顶点放置两部分，不同的是我们采用边折叠简化操作，并且根据简化过程中记录的局部参数化信息在球面上放置新加入的顶点。通过结合累进网格技术 [Hoppe1996] 和局部参数化技术，本文算法运行一遍就能为累进网格表示中每个层次的网格生成拓扑同构的球面网格。

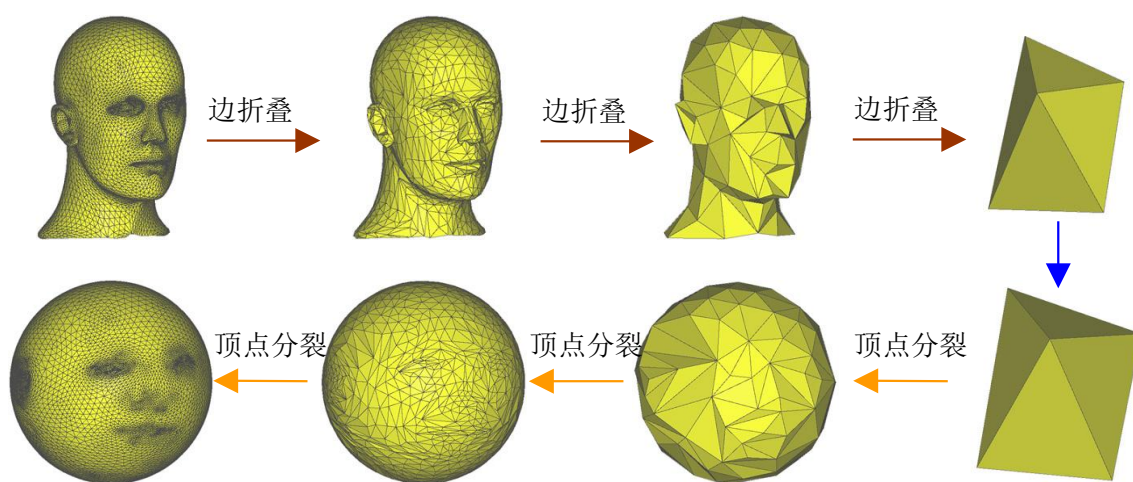


图 3.4 累进的球面参数化算法

图 3.4 说明了本文球面参数化算法的两个步骤：

- 1) 生成带有局部参数化信息的累进网格表示。循环地执行边折叠简化操作，直到当前简化网格变成一个凸多面体（这个凸多面体总是存在的，最坏的情况就是四面体），这个凸多面体被称为基网格。对每次边折叠简化操作，被删除的两个顶点被分别局部参数化到该边折叠操作生成的简化网格表面上。这些局部参数化信息被记录在累进网格表示的相应顶点分裂操作（边折叠操作的逆操作，参考图 3.5）中。
- 2) 由于基网格是凸多面体，从基网格的中心投影可以得到相应的球面网格。从初始球面网格开始，以逆序累进地执行记录在累进网格表示中的顶点分裂操作。对每次顶点分裂操作，使用局部参数化信息把两个分裂出来的顶点放置在单位球面上。当所有的顶点分裂操作执行完毕，原始网格的球面参数化就生成了。

下面我们详细描述算法中的一些关键技术，包括保面积的边折叠简化算法、局部参数化算法、累进球面参数化构造以及均匀参数化。

3.2.1 保面积的边折叠网格简化算法

1996 年, Hoppe 提出了累进网格技术 [Hoppe1996]。如图 3.5 所示, 边折叠操作 $ecol(e = \{v_1, v_2\})$ 把顶点 v_1 和 v_2 合并一个顶点 v , 顶点分裂操作 $vsplit(v)$ 把顶点 v 分裂成两个顶点 v_1 和 v_2 , 因此这两个操作互为逆操作。对任意输入网格 $M = M_n$, 通过 n 次边折叠操作可以把 M 简化为基网格 M_0 :

$$(M = M_n) \xrightarrow{ecol_{n-1}} \cdots \xrightarrow{ecol_1} M_1 \xrightarrow{ecol_0} M_0$$

设 $\{vsplit_0, vsplit_1, \dots, vsplit_{n-1}\}$ 中的顶点分裂操作是相应于集合 $\{ecol_0, ecol_1, \dots, ecol_{n-1}\}$ 中边折叠操作的逆操作, 则从基网格开始执行 n 次顶点分裂操作可以恢复出原始网格:

$$M_0 \xrightarrow{vsplit_0} M_1 \xrightarrow{vsplit_1} \cdots \xrightarrow{vsplit_{n-1}} (M_n = M)。$$

基网格加上顶点分裂操作集合 $(M_0, \{vsplit_0, vsplit_1, \dots, vsplit_{n-1}\})$ 就被称为网格 M 的累进网格 (Progressive Mesh, 简称 PM) 表示。

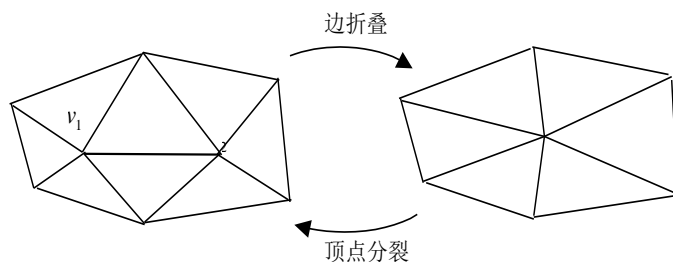


图 3.5 边折叠和顶点分裂操作

对基于边折叠操作的网格简化算法来说, 主要是决定两个问题: (1) 选择哪条边进行折叠, 即边折叠操作的顺序; (2) 如何放置边折叠合并生成的新顶点, 即求出新顶点的坐标。在各种已有的算法中, 基于二次误差度量 (Quadric Error Metric) 的算法效果最好 [Garland1997]。

[Garland1997] 的二次误差度量方法的基本思想是最小化新顶点 v 到与边 e 相关的所有三角形所在的平面的距离平方之和 $Dist(\mathbf{v})$:

$$Dist(\mathbf{v}) = Dist([v_x \ v_y \ v_z \ 1]^T) = \sum_{\mathbf{p} \in star(e)} (\mathbf{p}^T \mathbf{v})^2 \quad (3.1)$$

其中 $\mathbf{p} = [a \ b \ c \ d]^T$ 表示 $Star(e)$ 中三角形所在平面的方程 $ax + by + cz + d = 0$, 并且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 。

重写式 (3.1):

$$Dist(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{p} \in star(e)} (\mathbf{v}^T \mathbf{p})(\mathbf{p}^T \mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{p} \in star(e)} \mathbf{v}^T (\mathbf{p}\mathbf{p}^T) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \left(\sum_{\mathbf{p} \in star(e)} \mathbf{K}_p \right) \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_e \mathbf{v} \quad (3.2)$$

其中 \mathbf{K}_p 被称为基本二次误差矩阵:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{Q}_e = \sum_{\mathbf{p} \in star(e)} \mathbf{K}_p$ 被称为对应于边 e 的二次误差矩阵。

最小化 $Dist(\mathbf{v})$ 等同于求解 $\partial Dist / \partial x = \partial Dist / \partial y = \partial Dist / \partial z = 0$, 这就得到下面的线性方程组:

$$\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

如果上面线性方程组可解, 则 v 的位置由式 (3.3) 给出; 否则取边 e 的中点和两个端点中使得式 (3.2) 最小的位置作为 v 的位置。

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

基于上面的二次误差度量, 简化算法首先计算网格中每条边的最小折叠误差和新顶点的最优位置, 然后循环选出误差最小的边进行折叠。

我们的最终目的是构造球面参数化, 构造累进网格只是为了通过分层次的方法来简化球面参数化的构造过程。例如累进网格中层次为 i 的网格 M_i 的球面网格为 S_i , 我们希望在这个基础上能比较容易地构造层次为 $i+1$ 的网格 M_{i+1} 的球面网格 S_{i+1} 。这里我们引入保面积简化的概念, 即希望在简化过程中能使 M_{i+1} 和 M_i 的表面面积相同。这样的球面参数化过程就可以被想象成是给一个扁的足球充气, 先把具有少数控制点的 M_i 吹起来, 然后再吹 M_{i+1} , 而 M_{i+1} 和 M_i 的表面面积相同。

为了在简化过程中保持模型的表面面积, 需要最小化下面的目标函数:

$$E(\mathbf{v}) = \left\| \sum_{\Delta \in Star(e)} Area(\Delta) - \sum_{\Delta \in Star(v)} Area(\Delta) \right\| \quad (3.4)$$

显然式 (3.4) 是非线性的, 很难直接求解, 我们采用梯度下降法来迭代求近似解。迭代

初始值用 [Garland1997] 的方法计算。

这样我们的保面积网格简化算法采用 [Garland1997] 的方法来决定边折叠顺序和新顶点的初始位置，然后采用梯度下降法来最小化式 (3.4)。尽管这种保面积简化方法的初始目的只是为球面参数化服务，我们也很惊讶地发现这种方法在简化率很高是还能生成质量较高的简化网格。图 3.6 给出了一个简化例子。

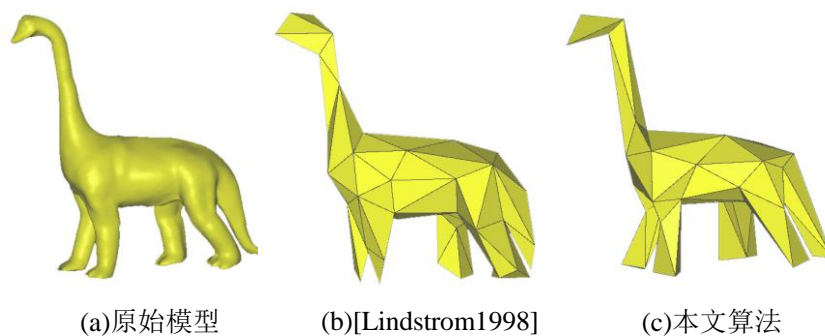


图 3.6 Dino 模型从 47858 简化到 100 个三角形

当然，由于多了保面积的约束，我们的简化算法速度要比 [Garland1997] 方法慢。需要指出的是，在上述球面参数化算法中，并不一定要采用保面积简化算法，事实上 [Garland1997] 和 [Lindstrom1998] 都可以适用。

3.2.2 局部参数化算法

局部参数化就是把每次边折叠操作删除的两个顶点映射到相应简化网络的表面上，映射点的位置要能较好反映顶点相对于简化网格的位置。由于映射点一般都在新顶点的 1 环领域内，所以这种参数化被称为局部参数化。MAPS [Lee1998] 中借助于保角映射给出了一种为顶点删除操作中被删除顶点构造局部参数化的方法。据我们所知，还没有公开发表的为边折叠操作的两个删除顶点构造局部参数化的算法。

如图 3.7 所示边 $e = \{v_1, v_2\}$ 折叠成顶点 v ，我们的局部参数化方法结合了 [Lee1998] 中保角映射技术和 [Eck1995] 调和映射技术：首先用保角映射 Ψ 把顶点 v 的 1 环邻居摊平到一个平面区域 U ，然后在保持边界不动的前提下用调和映射 Π 把 v_1 和 v_2 映射到 U 的内部。以 v_1 为例，设 $\Pi(v_1)$ 落在平面区域 U 的某个三角形 T_1' 中，并且 $\Pi(v_1)$ 在三角形 T_1' 中的质心坐标为 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ，即：

$$\Pi(v_1) = \alpha_1 p_{1,1} + \beta_1 p_{1,2} + \gamma_1 p_{1,3}$$

其中 $(p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3})$ 为三角形 T_1' 三个顶点的平面坐标。则顶点 v_1 在局部参数化下被以质心坐标 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ 映射到简化网格中对应于 T_1' 的三角形 T_1 中。同样， v_2 也可以以质心坐标 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ 被参数化到简化网格的某个三角形 T_2 中。

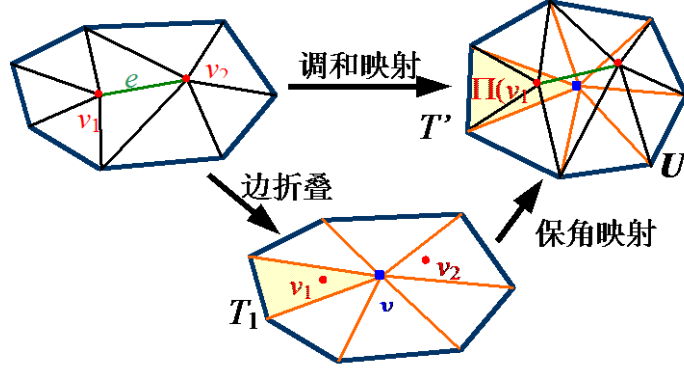


图 3.7 局部参数化算法

在构造以顶点 v 为中心的保角映射 Ψ 时，首先假设 v 为内点，先把它的 1 环邻居顶点按逆时针方向排序为 $N(v) = \{j_k \mid 1 \leq k \leq K_v\}$ ，其中 K_v 为 v 的入度。令 $j_0 = j_{K_v}$ ，则 $\{j_{k-1}, v, j_k\}$ 都是网格中三角形。保角映射 Ψ 把 v 映射到原点 $\Psi(v) = [0 \ 0]^T$ ，其在 $N(v)$ 中各顶点的值如下：

$$\Psi(j_k) = r_k^\alpha [\cos(\theta_k \alpha) \ \sin(\theta_k \alpha)]^T, \quad (3.5)$$

其中 $r_k = \|\mathbf{p}_{j_k} - \mathbf{p}_v\|$ ， $\theta_k = \sum_{l=1}^k \angle(\mathbf{p}_{j_{l-1}}, \mathbf{p}_v, \mathbf{p}_{j_l})$ ， $\alpha = 2\pi / \theta_{K_v}$ ， \mathbf{p}_j 表示顶点的三维坐标。如果 v 为边界顶点， $N(v)$ 构成一个半环，则通过设置上式中的 $\alpha = \pi / \theta_{K_v}$ 和 $\theta_1 = 0$ ， $N(v)$ 中的顶点被映射到一个半圆盘区域。

通过上面构造的保角映射 Ψ 就把简化网格中的 $N(v)$ 映射到一个平面多边形，这个多边形围成了一个多边形区域 U 。由于 $N(v) = N(e) = N(v_1) \cup N(v_2) - \{v_1, v_2\}$ ，所以现在我们可以固定边界不动，通过调和映射 Π 把 v_1 和 v_2 嵌入 U 中。即 $\Pi(j) = \Psi(j), \forall j \in N(e)$ ，求 $\Pi(v_i) = [x_i \ y_i]^T, i = 1, 2$ 。调和映射的目标是最小化下面的弹性能量：

$$E_{harm}(\Pi) = 1/2 \sum_{\{i,j\} \in Star(e)} w_{i,j} \|\Pi(i) - \Pi(j)\|^2 \quad (3.6)$$

其中 $w_{i,j}$ 表示边 $\{i, j\}$ 的弹性系数。设共享边 $\{i, j\}$ 的两个三角形为 $\{i, j, k_1\}$ 和 $\{i, j, k_2\}$ ，有：

$$w_{i,j} = (L_{i,k_1}^2 + L_{j,k_1}^2 - L_{i,j}^2) / Area_{\{i,j,k_1\}} + (L_{i,k_2}^2 + L_{j,k_2}^2 - L_{i,j}^2) / Area_{\{i,j,k_2\}}$$

其中 $L_{i,j}$ 表示边 $\{i, j\}$ 的长度， $Area_{\{i,j,k\}}$ 表示三角形 $\{i, j, k\}$ 的面积。如果边 $\{i, j\}$ 为边界边，则上式中就少一项。

显然对式 (3.6) 中的所有变量求偏导数令其为零可以得到一个线性方程组，求解该线性方程组就可以求出 $\Pi(v_i) = [x_i \ y_i]^T, i = 1, 2$ 。

3.2.3 累进球面参数化构造

在完成上面两小节介绍的保面积网格简化算法和局部参数化后，我们就得到了带有局部参数化信息的累进网格表示 $(M_0, \{vsplit_0, vsplit_1, \dots, vsplit_{n-1}\})$ ，其中 M_0 为凸多面体。从 M_0 的包围盒中心向单位球面投影就可以得到初始的球面网格 S_0 。从 S_0 开始，利用累进网格中顶点分裂操作记录下来的局部参数化信息可以把前面步骤删除的顶点逐步放置到单位球面上。

设累进网格中层次为 i 的网格 M_i 的球面网格为 S_i ，现在要构造层次为 $i+1$ 的网格 M_{i+1} 的球面网格 S_{i+1} 。从累进网格表示中取出第 i 次顶点分裂 $vsplit_i$ 操作，该操作把顶点 v 分裂为 v_1 和 v_2 。以 v_1 为例，它的局部参数化信息为 M_i 中的三角形 T_1 和质心坐标 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ，在球面网格 S_i 中找到对应于 T_1 的三角形 T_1' ，设 T_1' 三个顶点的三维坐标为 $(\mathbf{p}_{1,1}, \mathbf{p}_{1,2}, \mathbf{p}_{1,3})$ ，我们通过下面的公式把 v_1 放置在单位球面：

$$\mathbf{p}_{v_1} = \text{Normalize}(\alpha_1 \mathbf{p}_{1,1} + \beta_1 \mathbf{p}_{1,2} + \gamma_1 \mathbf{p}_{1,3})$$

其中 Normalize 是向量归一化操作。同样， v_2 也可以被放置到单位球面上。这样就可以到 S_{i+1} 。

在 S_i 上分裂出两个新顶点可能会造成新顶点附近的三角形发生翻转。因此，按照上面的方法放置好新分裂出来的顶点后还要检测有没有三角形翻转。如果发生翻转，可以用离散 Laplacian 算子对新顶点及其附近顶点取平均，直到得到正确的球面网格。

当累进网格中的最后一个顶点分裂操作 $vsplit_{n-1}$ 执行完毕，我们就得到对应于 $M = M_n$ 的球面网格 S_n ，也就得到网格 M 的一个球面参数化。

3.2.4 均匀球面参数化

从实验数据来看，上面通过累进网格和局部参数化构造的球面参数化是比较均匀的。但由于该方法通过局部参数化来在球面上放置顶点，这些顶点在球面上的位置是局部优化过的。我们还希望能全局优化这些顶点在球面上的位置使得参数化的伸缩变形较小。

首先我们通过局部坐标变换方法把 [Sander2001] 中的形变度量方法推广到球面参数化。给定网格 M 中的某个三角形 T ，设其三个顶点的三维坐标分别为 $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ ，球面网格上对应点的坐标为 $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ 。通过坐标变换，不难把 $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ 变换为 XY 平面上的二维坐标 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ ，其中 $\mathbf{p}_i = (s_i, t_i)$ 。这样三角形 $(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ 和三角形 $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)$ 之间定义了一个唯一的仿射变换 $S(\mathbf{p}) = S(s, t) = \mathbf{q}$ ：

$$S(\mathbf{p}) = \left(\langle \mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle \mathbf{q}_1 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 \rangle \mathbf{q}_2 + \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \mathbf{q}_3 \right) / \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle$$

其中 $\langle a, b, c \rangle$ 表示点 a, b, c 构成的三角形的面积。因为是仿射变换，所以 $S(s, t)$ 对 s 和 t 的偏导数为常数：

$$S_s = \partial S / \partial s = (\mathbf{q}_1(t_2 - t_3) + \mathbf{q}_2(t_3 - t_1) + \mathbf{q}_3(t_1 - t_2)) / (2A)$$

$$S_t = \partial S / \partial t = (\mathbf{q}_1(s_3 - s_2) + \mathbf{q}_2(s_1 - s_3) + \mathbf{q}_3(s_2 - s_1)) / (2A)$$

其中 $A = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \rangle = ((s_2 - s_1)(t_3 - t_1) - (s_3 - s_1)(t_2 - t_1)) / 2$ 。我们可以计算 Jacobian 矩阵 $[S_s \ S_t]$ 的最大奇异值 Γ 和最小奇异值 γ 如下：

$$\Gamma = \sqrt{1/2 \left((a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right)}$$

$$\gamma = \sqrt{1/2 \left((a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right)}$$

其中 $a = S_s \cdot S_s$, $b = S_s \cdot S_t$, $c = S_t \cdot S_t$ 。由于最大奇异值和最小奇异值表示把参数域中的单位长度向量映射到三维物体表面上的向量的最大和最小长度，因此 Γ 和 γ 和可以用来衡量参数化在三角形 T 上的变形程度。我们可以为 T 定义两种变形度量：

$$L^2(T) = \sqrt{(\Gamma^2 + \gamma^2) / 2} = \sqrt{(a+c) / 2}, \quad L^\infty(T) = \Gamma$$

$L^2(T)$ 对应于均方根变形， $L^\infty(T)$ 对应于最大变形。

对整个网格 M ，我们也可以定义两种变形度量：

$$L^2(M) = \sqrt{\sum_{T_i \in M} (L^2(T_i))^2 \text{Area}(T_i) / \sum_{T_i \in M} \text{Area}(T_i)} \quad (3.7)$$

$$L^\infty(M) = \max_{T_i \in M} L^\infty(T_i) \quad (3.8)$$

显然式 (3.7) 和 (3.8) 定义的变形度量是非线性的，我们通过迭代法来最小化这种变形。迭代的初始值就是 3.2.3 小节构造初始球面参数化。在每次迭代循环中，选出变形最大的顶点，调整其在单位球面上的位置使式 (3.7) 或 (3.8) 达到较小值。在循环若干次后就可以得到变形较小的球面参数化。

3.3 实验结果

由于上述球面参数化算法集成很多技术，因此也较难实现。在本文 DGP 框架的实现过程中，参数化的设计实现花费了三分之二的的时间。为了形象说明本章球面参数化的过程，我们把 Bunny 模型参数化过程中的一些中间结果做成一段视频（请参见 BunnySphereMap.gif）。

为了验证算法强壮性，我们测试了大量复杂的数据，都取得较好的结果。图 3.8 给出了一些模型参数化实例。表 3.1 给出了算法运行时间统计（Pentium III, 512M 内存）。

表 3.1 球面参数化运行时间统计（秒）

| 模型 | Cat | Mannequin | VenusHead | Dino | Bunny | Horse |
|--------|-----------|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| 顶点数目 | 4539 | 6769 | 50002 | 23931 | 34835 | 48485 |
| 累进网格生成 | 57 | 87 | 627 | 246 | 467 | 563 |
| 参数化生成 | 29 | 50 | 64 | 621 | 695 | 1192 |
| 总计 | 86 | 137 | 691 | 867 | 1162 | 1755 |

在我们测试过的 10 多个模型中，只有图 3.9 所示的模型失败了。显然，这种模型是很奇异的，相信其他的 DGP 算法也很难处理这种模型。

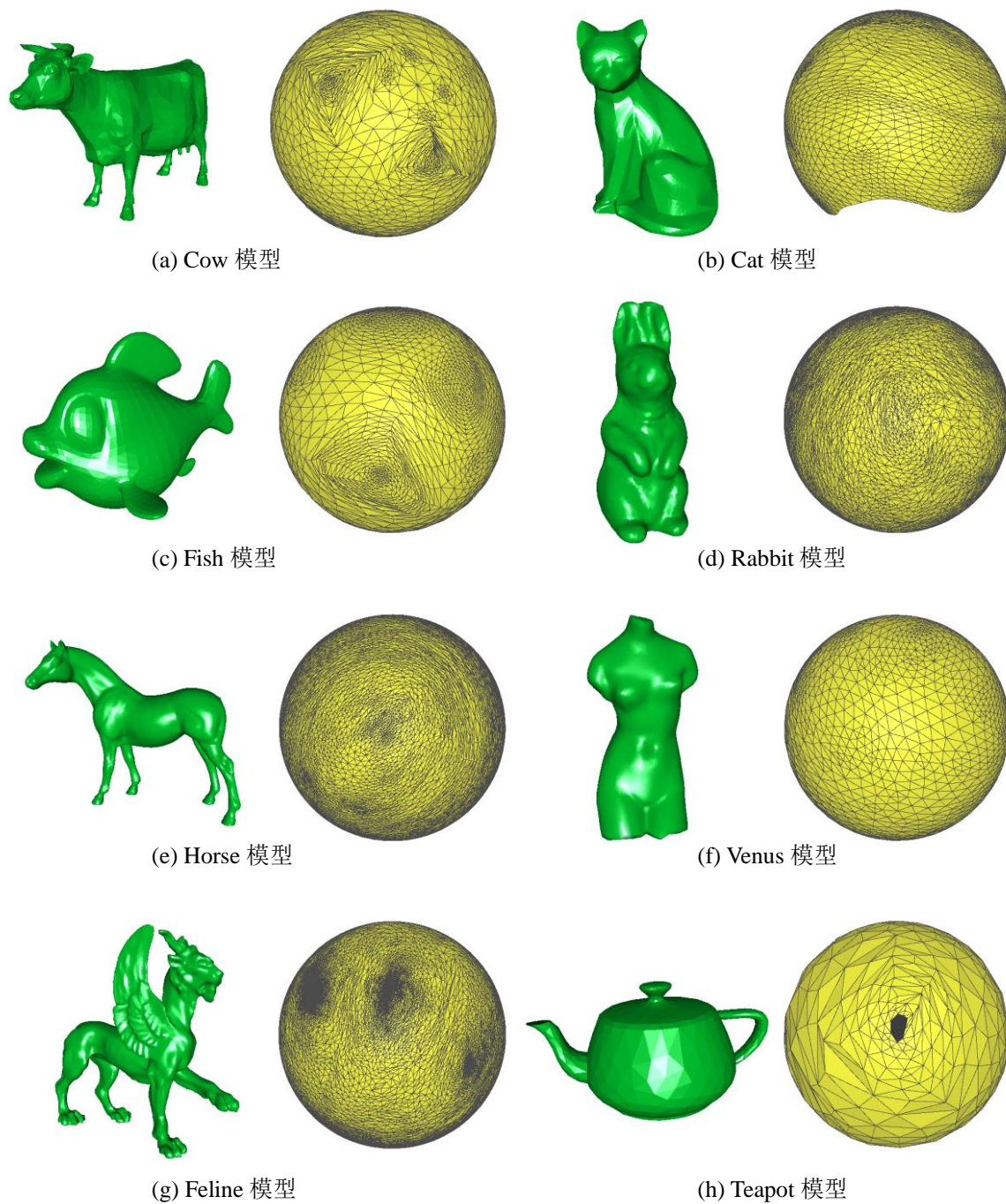


图 3.8 一些典型模型的球面参数化



图 3.9 本文算法不能处理的模型

3.4 参数化的均匀性讨论

尽管我们采用了 [Sander2001] 的方法来减少球面参数化的变形程度，但从 3.3 小节的实验结果来看，很多模型的球面参数化变形还是很严重，尤其是那些形状比较复杂的模型，如 Horse、Feline、Bunny 和 Cow。大家都知道在纹理映射应用中，变形程度大的参数化会带来纹理映射的不规则和走样。参数化变形对 DGP 算法的影响下章会详细讨论，本节讨论一些影响网格球面参数化均匀性的因素。

这里我们首先要澄清两个概念：参数化的变形程度和参数化的均匀性。从我个人的理解来看，变形是相对的概念，即参数化网格相对于原网格的变形；而均匀仅仅是指参数化网格本身的顶点分布很均匀。如果原网格的顶点分布很均匀，则参数化的均匀性隐含了参数化的变形程度。本文不区分这两个概念，统称为参数化的均匀性。

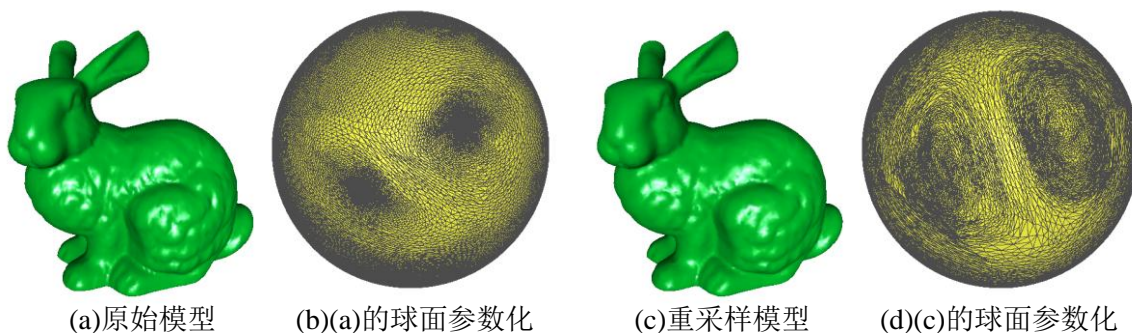


图 3.9 拓扑连接对参数化均匀性的影响

从实验结果得到的直观结论是复杂的形状是导致参数化不均匀的主要原因。例如对人头这样和球面比较接近的模型，参数化就很均匀；而对马这样有 4 条长腿和兔子这样有 2 个长耳朵的模型，参数化在相应区域就非常不均匀。从另外一个角度考虑，假设网格模型具有复杂的形状，但其拓扑连接很规则（几乎每个顶点的入度为 6），如果循环对其球面参数化网格的所有顶点的位置取离散 Laplacian 平均，不难证明最后这个球面网格会变得非常均匀。为了验证这个观点，我们用 [Turk1992] 的重采样方法生成另外一个非常逼近原始兔子的模型，只是这个新的兔子模型的拓扑连接要比原模型规则得多。

图 3.10 显示了新模型的球面参数化和原模型球面参数化的对比,显然前者要比后者均匀很多,尤其是兔子耳朵区域。

有些学者意识到网格模型的形状和拓扑连接是有密切联系的,其中最有价值的工作是由 Isenburg 等人提出的连接形状 (Connectivity Shapes) [Isenburg2001]。他们认为拓扑连接包含了很多形状信息的,对于某个给定形状也存在最适合该形状的拓扑连接。因此,我们建议在执行本章球面参数化算法前先对模型做预处理,得到较好的拓扑连接,相信这样能大大提高参数化的均匀程度,进而提高整个 DGP 框架的效率。当然,这个方法并不能解决所有的问题。

3.5 小结

本章介绍了作为本文 DGP 框架基础的球面参数化算法,并深入讨论参数化均匀性的问题。大量实验结果证明了该算法的强壮性。总的来说,本章算法有如下贡献:

- 1) 提出了一种新的保面积的网格简化算法,该算法能生成更高质量的简化模型。
- 2) 结合保角映射技术和调和映射技术,提出了一种新的局部参数化方法。
- 3) 结合累进网格技术和局部参数化技术,提出了一种累进构造球面参数化的算法。该算法运行一遍能为累进网格表示中的每个层次网格都生成球面参数化。实验结果证明了该算法是目前最强壮、效率最高的球面参数化算法。
- 4) 把 [Sander2001] 的参数化变形度量和优化方法推广到球面参数化,用于均匀参数化。

第四章 保频谱的自适应采样算法

本章介绍保频谱的自适应采样算法，该算法和上章介绍的球面参数化一起构成本文 DGP 框架的两个核心技术。首先我们分析第二章介绍的均匀采样方法的缺点，并深入讨论了 DGP 中参数化和采样的关系；第二节进一步分析了参数化的不均匀性对信号频谱的影响，得出了能量迁移论断；第三节描述我们设计的保频谱自适应采样策略；最后是本章小结。

4.1 问题的提出

通过第二章对本文 DGP 框架各流程的介绍和第三章描述的球面参数化算法，给出了本文 DGP 算法所涉及的一些技术细节。事实上，上述算法已经足够处理所有网格模型的几何信号，而且对一些模型也能取得较好的效果。那么本章要描述的自适应采样在 DGP 框架中有什么作用呢？

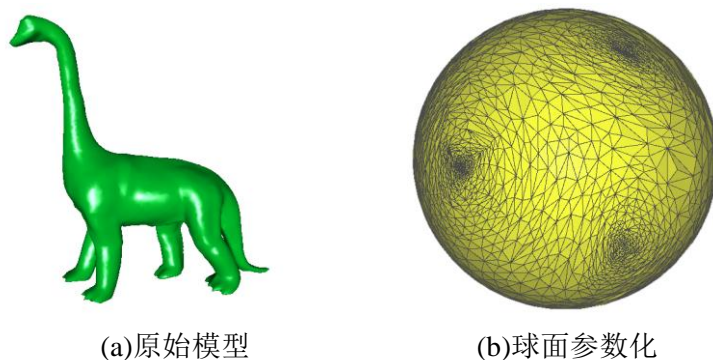


图 4.1 Dino 模型的球面参数化

在第三章对参数化均匀性的讨论部分，我们已经提到即使采用改善拓扑连接的方法，某些具有复杂形状的网络模型的参数化还是很不均匀。例如图 4.1 所示的 Dino 模型有四条腿和很狭长的脖子，腿和脖子区域的球面网格的顶点分布密度很大，非常不均匀。从 2.2.3 小节知道，为了使用快速球面调和变换，必须沿球面的经纬方向均匀采样球面信号，而且公式 (2.10) 计算出的采样误差必须小于用户给定的精度要求 ϵ 。不难理解为了保证有足够的采样点能捕捉到顶点分布密度很大的区域中的信号会导致采样率的大幅度增加，而采样率的增加会增加算法的运行时间和所需内存。图 4.2 给出了 Dino

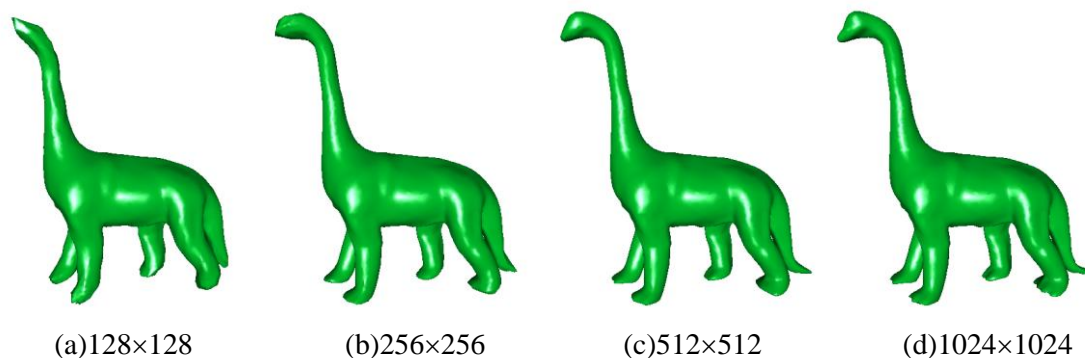


图 4.2 Dino 模型在不同采样率下重建出来的结果

模型在不同采样率下重构出来的结果，注意到即使在较高的采样率下，重构出来的模型和原模型之间的差别还是较大，特别实在头、尾巴和脚区域。

这里存在着另外一个问题：尽管定义在网格 M 表面上的几何信号 F_M 通过球面参数化被转换为定义在单位球面网格 S 表面上的信号 F_S ，信号 F_M 和 F_S 在 Fourier 意义上的频谱一致吗？如果把频谱和 F_M 不一致的信号 F_S 分解到频率域，处理后再合成回空间域会带来什么问题？第二章介绍的 DGP 框架隐含地认为 F_S 和 F_M 的频谱是一致的。实际上这取决于参数化的均匀性，下节我们会详细分析参数化是如何影响信号频谱的。

从本人的理解来看，DGP 本质上包含了两个问题—参数化和采样，这两个问题也是 DGP 框架中的两个最重要流程。这一点可以从基于子分网格的 DGP 算法得到验证，这类算法首先要构造定义在基网格上的参数化，然后做子分采样。本文 DGP 框架也是先做球面参数化，再做采样。不同的是，为了采用快速球面调和变换，我们的采样是在球面经纬方向的均匀采样；而子分网格算法为了采用子分小波，则进行子分采样。参数化的均匀性是大家一致追求的目标，但即使是目前最好的参数化算法也无法保证参数化的绝对均匀性。事实上，不同的参数化算法采用不同的伸缩变形度量方法，因此得到的结果都仅仅是在该度量方法下的最小变形参数化。具体到我们的球面参数化，当模型的形状很复杂时，无论采用哪种优化算法，参数化都是很难均匀的。因此，我们提出了另外一个思路：参数化阶段无法处理的问题，能不能在采样阶段处理？我们期望通过自适应采样来解决参数化非均匀引起的频谱变化问题。

在介绍我们的自适应采样算法前，先来看看参数化究竟如何影响信号频谱。

4.2 参数化对信号频谱的影响

我们先来研究二维曲线参数化的情况，再把结论推广到三维表面。

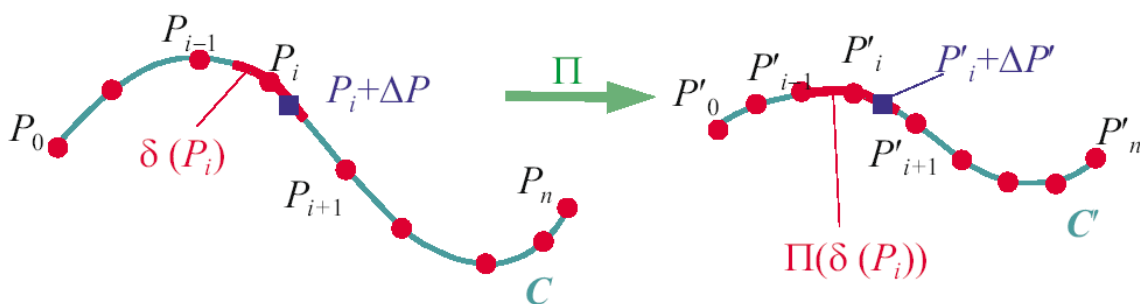


图 4.3 曲线参数化

如图 4.3 所示, 设 $C = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ 为一段离散化的曲线, 长度为 L ; f 是定义在 C 上的分段线性函数, $f(P_i) = f_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。假设 C 被同构映射 $\Pi_{C-C'}$ 映射到另一条长度为 L 的曲线 C' , $\Pi_{C-C'}(P_i) = P'_i$ 。这样我们就得到了一个定义在曲线 C' 的新函数 f' , $f'(P'_i) = f(P_i) = f_i$ 。类似于第二章中网格顶点分布密度的定义 (2.1), 我们可以定义曲线上的顶点分布密度:

$$D_C(P_i) = \frac{3L}{\|P_i - P_{i-1}\| + \|P_{i+1} - P_i\|}$$

$$D_{C'}(P'_i) = \frac{3L'}{\|P'_i - P'_{i-1}\| + \|P'_{i+1} - P'_i\|}$$

其中 $D_C(P_i)$ 表示曲线 C 上点 P_i 处的顶点分布密度, $D_{C'}(P'_i)$ 表示曲线 C' 上点 P'_i 处的顶点分布密度。

设 $F(s)$ 和 $F'(s)$ 分别函数 f 和 f' 的 Fourier 变换。现在我们来分析曲线 C 上点 P_i 的某个邻域 $\delta(P_i)$, 如果函数 f 分布在邻域 $\delta(P_i)$ 内的能量分布在频谱 $F(s)$ 的区间 (s_a, s_b) 内, 我们希望知道函数 f' 分布在 $\Pi(\delta(P_i))$ 内的能量分布在频谱 $F'(s)$ 的什么区域。

考虑 $\delta(P_i)$ 内的一点 $P_i + \Delta P$ 及其映射点 $P'_i + \Delta P'$, 不失一般性, 我们可以假设 $\delta(P_i)$ 内所有点的分布密度都为 $D_C(P_i)$, $\Pi(\delta(P_i))$ 内所有点的分布密度为 $D_{C'}(P'_i)$, 则我们可以很容易得到下面的式子:

$$\Delta P = \Delta P' \frac{D_{C'}(P'_i)}{D_C(P_i)} \quad (4.1)$$

另外, 根据 Fourier 变换的平移定律, 函数平移不会改变其 Fourier 变换的幅值, 而只是改变实部和虚部之间的能量分布。所以, 我们可以假设 P_i 和 P'_i 分别为函数 f 和 f' 的原点而不会影响对上述问题的分析。这样可以得到下面的式子:

$$f'(\Delta P') = f(\Delta P) = f\left(\Delta P' \frac{D_C(P_i')}{D_C(P_i)}\right) = f(\Delta P' R(P_i)) \quad (4.2)$$

其中 $R(P_i) = \frac{D_C(P_i')}{D_C(P_i)} = \frac{D_C(\Pi(P_i))}{D_C(P_i)}$ 。

对式 (4.2) 进行 Fourier 变换:

$$F'(s) = FT(f'(\Delta P')) = FT(f(\Delta P' R(P_i))) = \frac{1}{R(P_i)} F\left(\frac{s}{R(P_i)}\right) \quad (4.3)$$

从式 (4.3) 不难推出, 函数 f' 分布在 $\Pi(\delta(P_i'))$ 的能量 (对应于 f 分布在邻域 $\delta(P_i)$ 内的能量) 分布在频谱 $F'(s)$ 中的区域 $(R(P_i)s_a, R(P_i)s_b)$ 。因此, 我们可以做出下面的**能量迁移论断 (Energy Shifting Affirmation)**:

- 1) 如果 $R(P_i) = 1$, 即参数曲线在 P_i' 的顶点分布密度和原始曲线在 P_i 的顶点分布密度相等, 则参数化不会影响频谱能量分布 (图 4.4(a))。
- 2) 如果 $R(P_i) > 1$, 即参数曲线在 P_i' 的顶点分布密度大于原始曲线在 P_i 的顶点分布密度, 则参数化会导致分布在 P_i 局部邻域内的能量从较低频率段迁移到较高频率段 (图 4.4(b))。
- 3) 如果 $R(P_i) < 1$, 即参数曲线在 P_i' 的顶点分布密度小于原始曲线在 P_i 的顶点分布密度, 则参数化会导致分布在 P_i 局部邻域内的能量从较高频率段迁移到较低频率段 (图 4.4(c))。

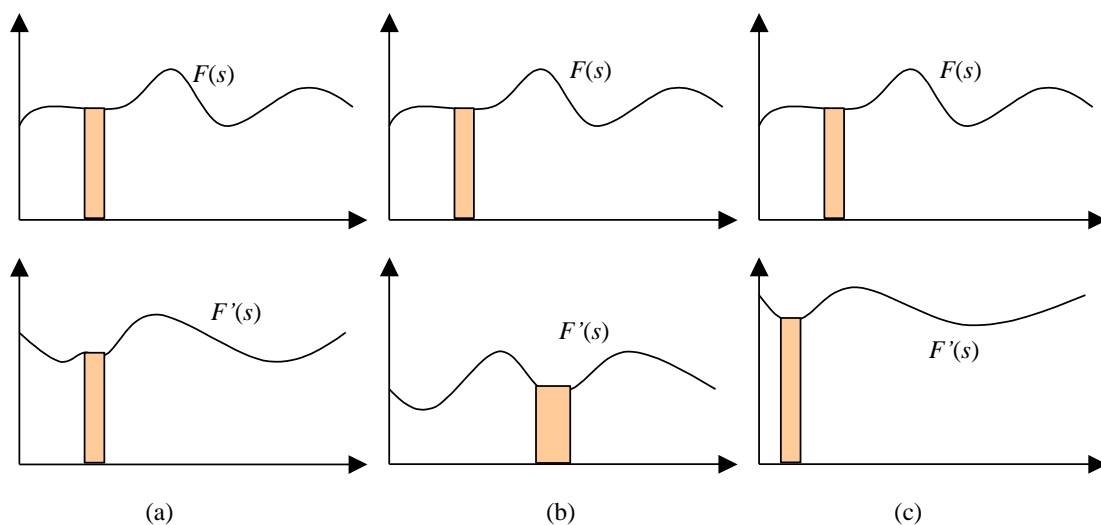


图 4.4 频谱能量迁移

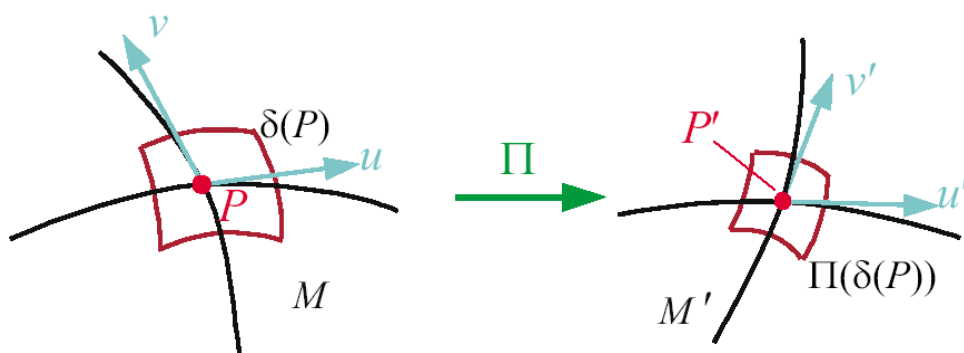


图 4.5 曲面参数化

同样也可以对三维网格进行类似的分析。如图 4.5 所示，我们可以分析网格 M 表面上一点 P 的邻域内的能量迁移。尽管这个问题可以沿图中所示的网格表面的两个主曲率方向 u 和 v 分解为两个独立的曲线问题，这样的计算复杂度太高。我们的方法是采用第二章式 (2.1) 来计算顶点分布密度 $D_M(P)$ 和 $D_{M'}(P')$ ，它们的比值 $R_a(P) = D_{M'}(P') / D_M(P)$ 就被用在上述能量迁移论断中。当参数化沿两个主曲率方向的变形程度一致时， $R_a(P)$ 就能很好地刻画 P 点的邻域内的能量迁移问题。

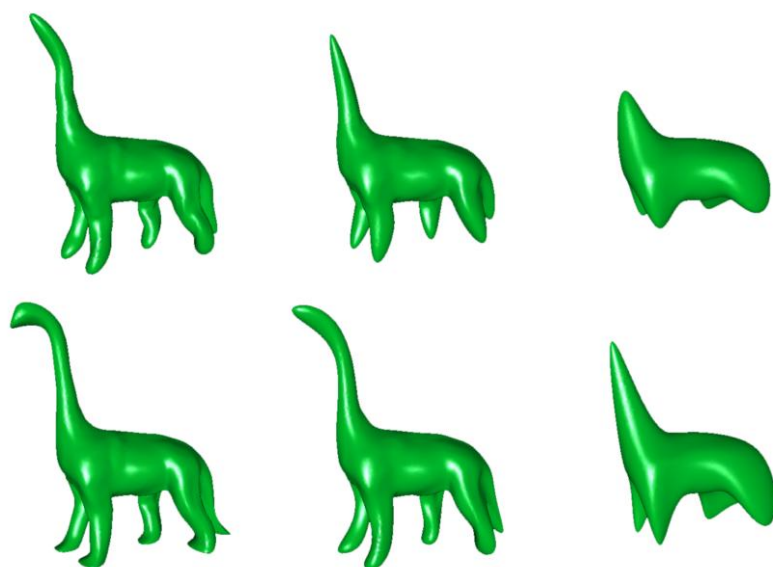


图 4.6 均匀采样和自适应采样低通滤波结果比较

从上面的分析可以看出不均匀参数化会导致转化后的几何信号的频谱和原几何信号的频谱不同，如果直接对新信号的频谱进行处理可能会得不到期望的结果。图 4.6 给出了对图 4.1 中的 Dino 模型进行低通滤波的结果，上面一排是直接对参数化得到的球面信号处理的结果，下面一排是先调用下节将要介绍的自适应采样方法然后再滤波的结果。前面已经提到了，Dino 模型参数化在腿和脖子区域不均匀，顶点分布密度很大。根据上面的能量迁移论断，较大的顶点分布密度会导致该区域的能量从低频率段迁移到高

频率段，当直接对球面信号低通滤波时，滤掉的一部分高频能量实际上对应于原信号的低频能量。这就解释了为什么图 4.6 上面一排的滤波结果会出现 Dino 的腿和脖子部分消失得特别快。

根据上面的分析，在采用球面调和变换进行频率分解前，我们必须先得到一个频谱和原信号频谱相近的球面信号。这样才能保证在频率域的后继处理能得到期望的结果。

4.3 保频谱的自适应采样策略

根据上节的能量迁移论断，为了得到具有和原信号频谱相近频谱的球面信号，必须构造一个具有和原网格的顶点分布密度相近的球面网格。从第三章的分析知道，某些形状复杂的模型的球面参数化网格是很难均匀的。因此我们设计了一种自适应采样方法来得到具有和原信号相近频谱的球面信号。

在描述该自适应采样方法前，我们先定义一个衡量两个网格模型（这两个网格的拓扑连接可以不同）顶点分布密度相似程度的度量标准。设 $\Psi_{M-M'}$ 是从网格 M 到网格 M' 的同构或同形映射，如果下式满足则称网格 M 和 M' 在映射 $\Psi_{M-M'}$ 下具有相同的顶点分布密度：

$$\frac{1}{|M|} \sum_{i=0}^{|M|} |D_{M'}(\Psi_{M-M'}(\{i\})) - D_M(\{i\})| < \varepsilon \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{|M'|} \sum_{i=0}^{|M'|} |D_M(\Psi_{M-M'}^{-1}(\{i\})) - D_{M'}(\{i\})| < \varepsilon \quad (4.5)$$

其中， ε 是用户指定精度要求。如果网格 M 和 M' 具有相同的顶点分布密度，则定义在 M 表面上的几何信号和由 $\Psi_{M-M'}$ 转换过去的定义在 M' 表面上的信号被认为具有相同的频谱。

如图 4.7 所示，设网格模型 M ，其球面参数化网格为 S_0 ，参数化映射为 Γ_{M-S_0} 。我们的自适应采样方法包括两步：（1）构造具有均匀顶点入度分布的球面网格 S_1 ，显然投影映射 $\Omega_{S_0-S_1}$ 为 S_0 和 S_1 之间的同形映射， S_0 和 S_1 在投影映射 $\Omega_{S_0-S_1}$ 下具有相同的顶点分布密度；（2）重新分布球面网格 S_1 的顶点得到球面网格 S_2 ， S_1 和 S_2 具有相同的拓扑连接，显然它们之间存在同构映射 $\Gamma_{S_1-S_2}$ ， S_2 和网格 M 之间存在同形映射 $\Omega_{M-S_2} = \Gamma_{S_1-S_2} \Omega_{S_0-S_1} \Gamma_{M-S_0}$ ， S_2 和 M 在同形映射 Ω_{M-S_2} 具有相同的顶点分布密度。这样定义在网格 M 上的几何信号通过同形映射 Ω_{M-S_2} 转换到球面网格 S_2 的几何信号被认为具有和原信号相同的频谱。

选择具有有均匀顶点入度分布的球面网格作为采样球面是为了可以方便地重新分布这种球面网格的顶点使其分布密度满足任意要求。在我们的目前实现中， S_1 被初始化为从 C60 分子模型子分得到的均匀球面网格，这种网格除了 6 个顶点的入度为 5 之外，

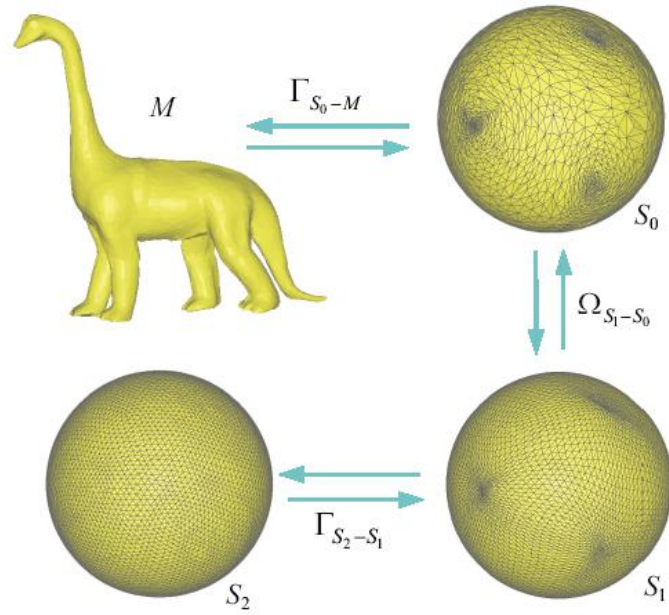


图 4.7 自适应采样方法

其他顶点的入度都为 6。子分的次数一般是使得 S_1 的顶点数目大于原始网格 M 顶点数目的 4 倍以上（类似于 Nyquist 采样定律）。然后通过下面的步骤来完成采样过程，第一步的目的是用顶点分布密度和网格 S_0 相同的球面网格 S_1 来采样球面信号，第二步的目的是生成顶点分布密度和原始网格 M 相同的球面网格 S_2 。

- 1) 采用下面的松弛算子重新分布网格 S_1 中每个顶点 $\{i\}$ 的球面位置 p_i ，使得其顶点分布密度和网格 S_0 相同：

$$p_i^{new} = \text{Normalize}\left(\frac{1}{\sum_{\{j\} \in N(\{i\})} R(p_j)} \sum_{j \in N(\{i\})} R(p_j) p_j\right)$$

其中 $R(p_j) = D_1'(p_j) / D_{S_1}(p_j)$ ， $D_1'(p_j) = D_{S_0}(\Omega_{S_0-S_1}^{-1}(p_j))$ 。一旦顶点 $\{i\}$ 的位置被更新， $D_1'(p_i)$ 和 $D_{S_1}(p_j)(j \in N(\{i\}))$ 也要做相应的更新。这个松弛迭代过程会执行若干次或者式 (4.4) 和 (4.5) 被满足。

- 2) 复制球面网格 S_1 得到 S_2 ，采用类似于第一步中的松弛算子重新分布 S_2 中的每个顶点 $\{i\}$ 的球面位置 p_i ，使得其顶点分布密度和原始网格 M 相同。与第一步不同的是 $R(p_j) = D_2'(p_j) / D_{S_2}(p_j)$ ，其中：

$$D_2'(p_j) = D_M(\Omega_{M-S_2}^{-1}(p_j)) = D_M(\Gamma_{M-S_0}^{-1}(\Omega_{S_0-S_1}^{-1}(\Gamma_{S_1-S_2}^{-1}(p_j))))。$$

另外，当顶点 $\{i\}$ 的位置被更新， $D_{S_2}(p_j)(j \in N(\{i\}))$ 也要做相应的更新。

通过上述过程可以把定义在网格 M 上的几何信号通过同形映射 Ω_{M-S_2} 转换到球面网格 S_2 ，而且两个几何信号被认为具有相同的频谱。这样我们就可以对球面 S_2 上的几何信号做规则采样、调和分析和处理了。当然，信号重构时还必须调用逆映射 $\Omega_{M-S_2}^{-1}$ 。

图 4.6 中第二行的结果就是用上述自适应采样方法处理后再滤波的结果。显然，腿和头部收缩的现象得到了很大的改进。另外，滤波的结果也比直接均匀采样处理的结果光滑。当然，采用自适应采样方法会带来额外的时间和空间代价。

4.4 小结

本章介绍了本文 DGP 框架中另一个核心技术—保频谱的自适应采样算法。为了解决参数化不均匀的问题，我们提出了在采样阶段处理这个问题的崭新思路。通过分析参数化对信号频谱的影响，我们设计了一种巧妙自适应采样方法，并取得了较好的实验结果。下面总结了本章的贡献：

- 1) 通过分析参数化对信号频谱的影响，提出了能量迁移论断，即参数化网络的顶点分布密度与原始网络的顶点分布密度不同会导致能量在频率段之间发生迁移。该论断不仅仅是针对球面参数化，还适用于所有的参数化。
- 2) 引入顶点入度分布均匀的球面网格来采样几何信号，并通过松弛迭代使得这个球面网格的顶点分布密度与原始网格模型相同，从而得到具有和原信号频谱相同的球面信号。

需要指出的，尽管本章介绍的自适应采样算法能取得较好的实验结果，为了满足式 (4.4) 和 (4.5) 对顶点分布密度的要求，松弛迭代过程通常在 100 次以上，这个时间代价很高。而且从式 (4.4) 和 (4.5) 就推出信号频谱相同的结论只是一种工程近似。因此，如何更高效地在采样阶段处理参数化不均匀的问题还有待进一步的研究。

第五章 几何信号处理

本章介绍在本文提出的 DGP 框架下实现的几个典型的 DGP 应用，并给出了大量实验结果说明算法的强壮性。第一节介绍信号几何信号滤波和增强，包括频域滤波和卷积滤波；第二节介绍多个模型之间的细节和纹理传输；第三节介绍多分辨率几何信号编辑，这一功能很好地说明了本文 DGP 框架如何支持几何信号在空间域和频率域之间的自由切换；第四节介绍在 Fourier 变量域内差值的网格变形算法；最后是本章小结。

5.1 几何信号滤波与增强

由于能表示任意拓扑、形状的模型并且适合图形硬件处理，多边形网格在图形学中被广泛应用。除了用造型软件搭建网格模型外，更多的模型是通过三维扫描和三维重建得到的 [Amenta1998, Curless1996, Hoppe1992, Hoppe1993, Hoppe1994]。由于三维扫描不可避免地带来测量噪声和误差，所以重建后的网格模型表面一般都会有凹凸不平的细小噪声。和数字图像处理一样，我们需要设计能去掉这些噪声的低通滤波器。另一方面，一些数字几何处理应用也需要类似于数字图像处理中的带阻滤波器和增强滤波器。事实上，滤波是传统信号处理中最普遍的应用，很多信号处理问题最后都可以归结为滤波器设计问题。

对数字几何处理应用来说，滤波最大的作用是去噪声和光顺造型。尽管去噪声和光顺本质上就是低通滤波，但在很多学者提出的网格光顺算法 [Desburn1999, Greiner1995, Guskov1999, Heckbert1997, Kobbelt1997, Liu2001, Morton1990, Taubin1995, Taubin1996, Vollmer1999, Welch1992] 中，除了 [Taubin1995, Taubin1996] 基于信号处理方法，其它算法都是从带约束的能量最小化出发来设计光顺算子。在本文 DGP 框架下，几何信号被分解到真正的 Fourier 变量域，传统的滤波器设计方法都可以用来根据不同的需求设计优化的滤波器，这使得本文框架能最大限度地满足各种滤波应用的需求。

本章只介绍线性滤波器的设计和实现，我们有两种选择，一种是直接在频率域控制各频率段的能量，另一种是设计卷积核来进行卷积滤波。

5.1.1 频域滤波

根据第二章介绍的球面调和变换，对采样率为 $2B \times 2B$ 的规则球面信号 $F(\theta, \phi)$ ，通

过球面调和变换分解为 B^2 个调和系数 $\{f(l, m) | 0 \leq l < B, |m| \leq l\}$ 。这些调和系数表示信号在对应频率 $\sqrt{l^2 + m^2}$ 处的幅值, 较大的 $\sqrt{l^2 + m^2}$ 对应较高频, 较小的 $\sqrt{l^2 + m^2}$ 对应低频。对模型的位置坐标信号来说高频对应模型表面的细节, 而低频对应模型的整体形状。

因此, 在频域内设计滤波器可以通过定义一个所谓的滤波函数 $g(l, m)$, 用 $g(l, m)$ 乘以原信号的频谱 $f(l, m)$ 得到新的频谱 $f'(l, m)$:

$$f'(l, m) = g(l, m)f(l, m)$$

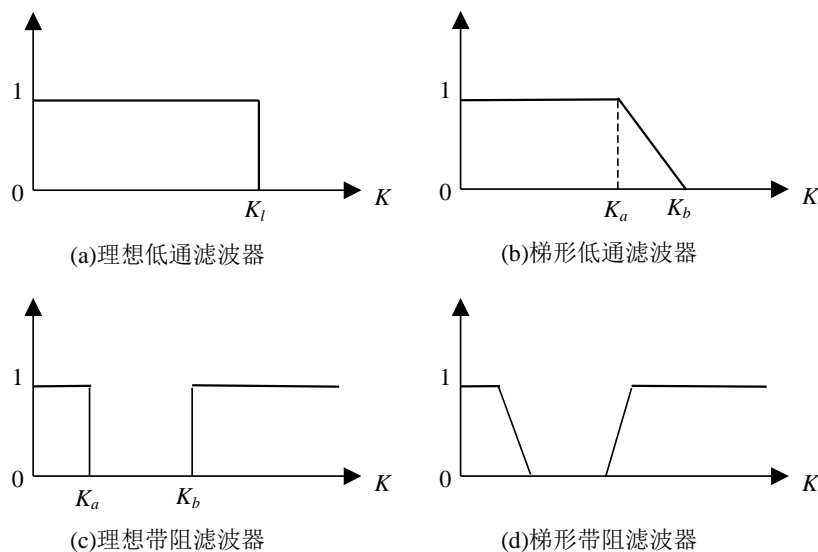


图 5.1 低通滤波器

例如, 理想低通滤波器 (即高频截至) $g(l, m)$ 可以设置为:

$$g(l, m) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \sqrt{l^2 + m^2} > K_l \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

为了减少振铃效应 (Ringing), 提高滤波结果的光滑性, 我们还可以采用梯形低通滤波器:

$$g(l, m) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \sqrt{l^2 + m^2} > K_b \\ 1 & \text{如果 } \sqrt{l^2 + m^2} < K_a \\ (\frac{K_b - \sqrt{l^2 + m^2}}{K_b - K_a}) & \text{否则} \end{cases}$$

同样的, 理想带阻滤波器可以设置为:

$$g(l, m) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } K_a < \sqrt{l^2 + m^2} < K_b \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

读者不难推出梯形带阻滤波器的形式。图 5.1 显示了上述几种低通滤波器的波形。

图 5.2 给出了 VenusHead 模型进行理想滤波的结果, 5.2(a)是原始模型, 5.2(b)、5.2(c)

和 5.2(d)是低通滤波的结果 (K_l 分别为 80、20 和 2)，5.2(e)和 5.2(f)是带阻滤波的结果 ((K_a, K_b) 分别为 (10,20) 和 (20,40))。注意到 5.2(d)是低通滤波进行到极限时候的结果，生成了一个非常光滑的椭球。图 5.3 给出了对 Bunny 模型进行理想滤波和梯形滤波的比较结果，(a)是理想低通滤波的结果，从左到右参数分别为 30、20 和 10，(b)是梯形低通滤波的结果，从左到右参数分别为 (25,35)、(15,25) 和 (5,15)。不难看出梯形滤波的结果比理想滤波的结果要光滑一些。

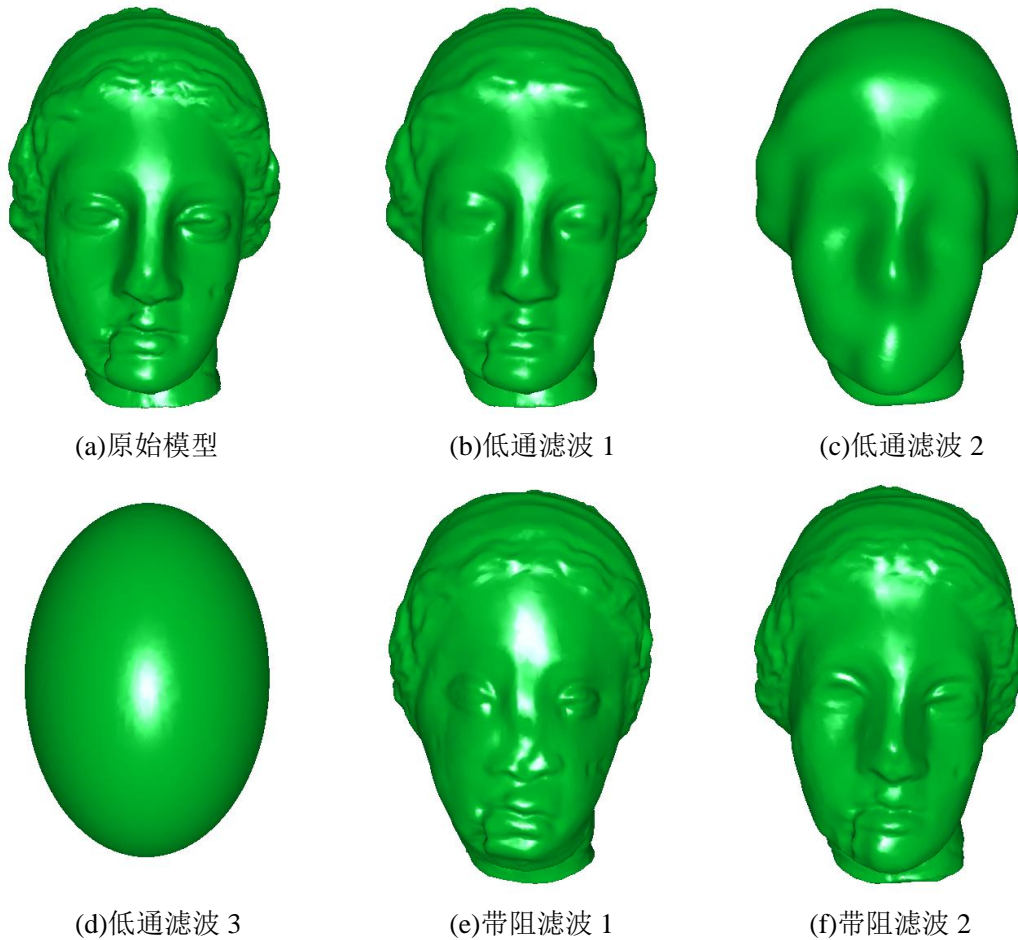
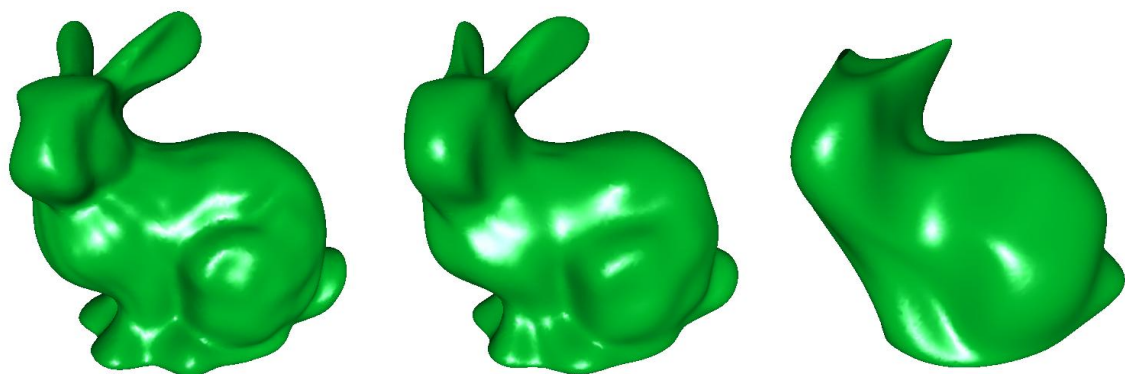


图 5.2 Venushead 模型的理想滤波

为了和其它光顺算法做比较，我们还实现了目前最好的处理顶点位置坐标信号的算法 [Guskov1999]。图 5.4 的上面一行是 [Guskov1999] 算法低通滤波的结果，第二行是本文算法的结果。注意到当低通滤波进行到极限的时候，本文算法总是得到椭球模型。这和图像处理中的低通滤波结果是吻合的，即对一幅图像做低通滤波的极限结果是一幅只有一种颜色的图像。而 [Guskov1999] 方法的极限滤波结果还带有原始模型的很多特征，比如图中 Horse 模型 4 条细长的腿。这是由本文信号处理框架坚实的理论基础决定的。图 5.5 还给出了对 Dino 模型做处理的对比结果。



(a)理想低通滤波结果，从左到右参数分别为 30、20 和 10。



(b)梯形低通滤波结果，从左到右参数分别为 (25,35)、(15,25) 和 (5,15)。

图 5.3 Bunny 模型理想滤波和梯形滤波比较

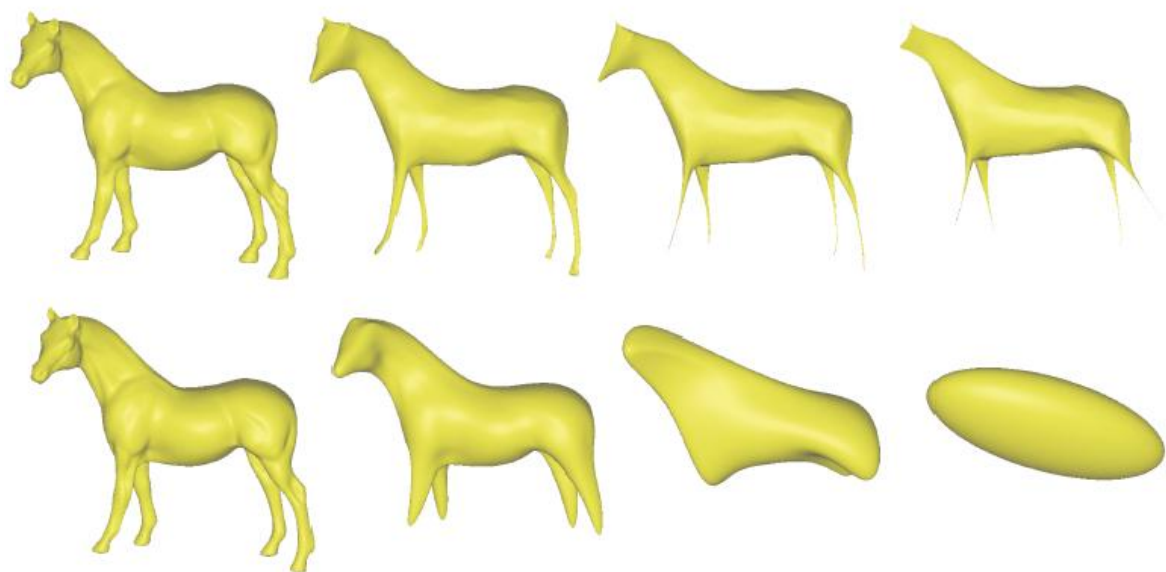


图 5.4 [Guskov1999] 和本文算法对 Horse 模型进行低通滤波的结果比较。

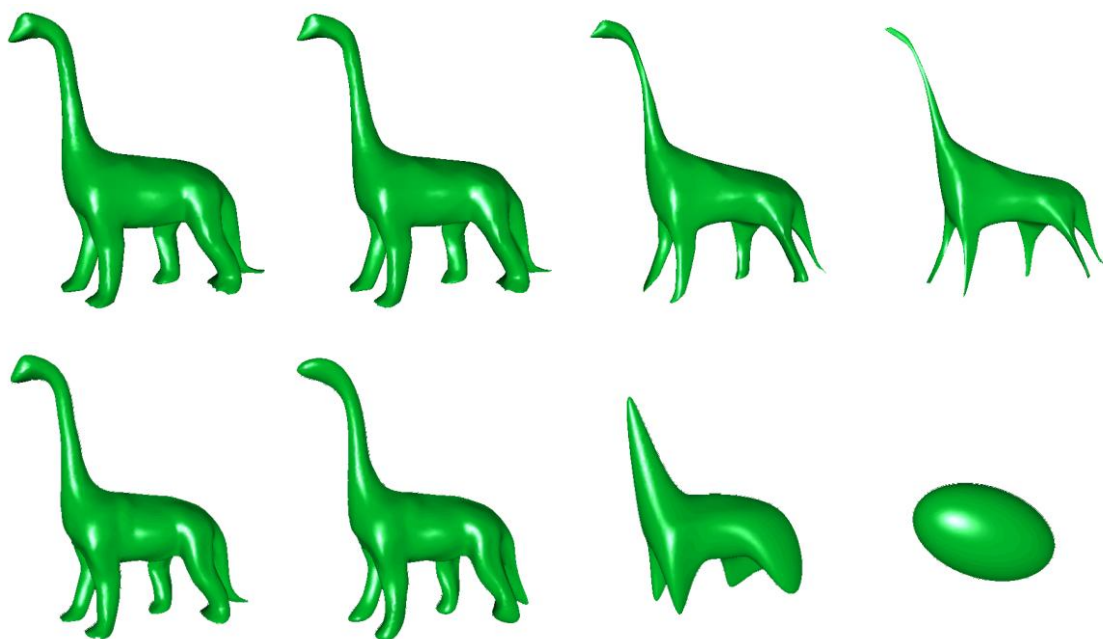
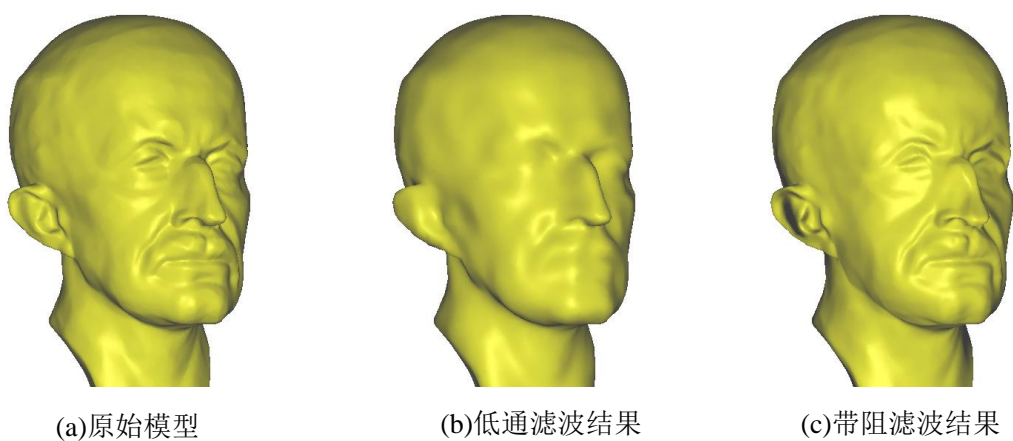


图 5.5 [Guskov1999] 和本文算法对 Dino 模型进行低通滤波的结果比较。

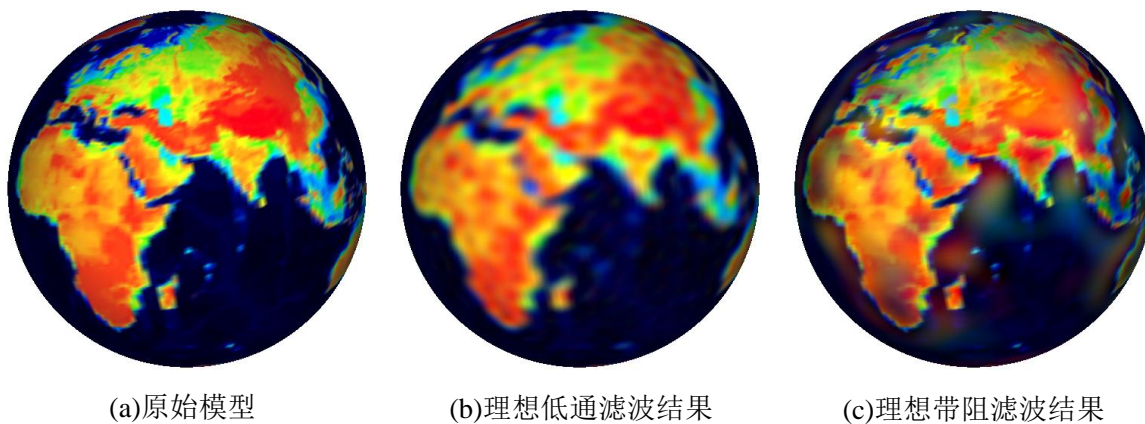


(a)原始模型

(b)低通滤波结果

(c)带阻滤波结果

图 5.6 Planck 模型法向量滤波



(a)原始模型

(b)理想低通滤波结果

(c)理想带阻滤波结果

图 5.7 Earth 模型的颜色信号滤波结果

另外, 本文框架对法向量和颜色属性也是统一处理的。图 5.6 给出了对 Planck 模型的法向量进行滤波的结果, (a)是原始模型, (b)是理想低通滤波 (K_l 为 32) 结果。(c)是带阻滤波 ((K_a, K_b) 为 (10,20)) 结果。图 5.7 给出了对地球颜色模型滤波的结果, (b)的参数是 64, (c)的参数是 (8,24)。图 5.8 是对 Bunny 模型的颜色信号进行滤波的结果, (b)、(c)和(d)的参数分别为 128、32 和 1, (e)和(f)的参数分别为 (4,16) 和 (32,64)。值得指出的是, 在所有的几何信号处理文献中, 本文第一次给出了对法向量和颜色数据进行滤波的结果。

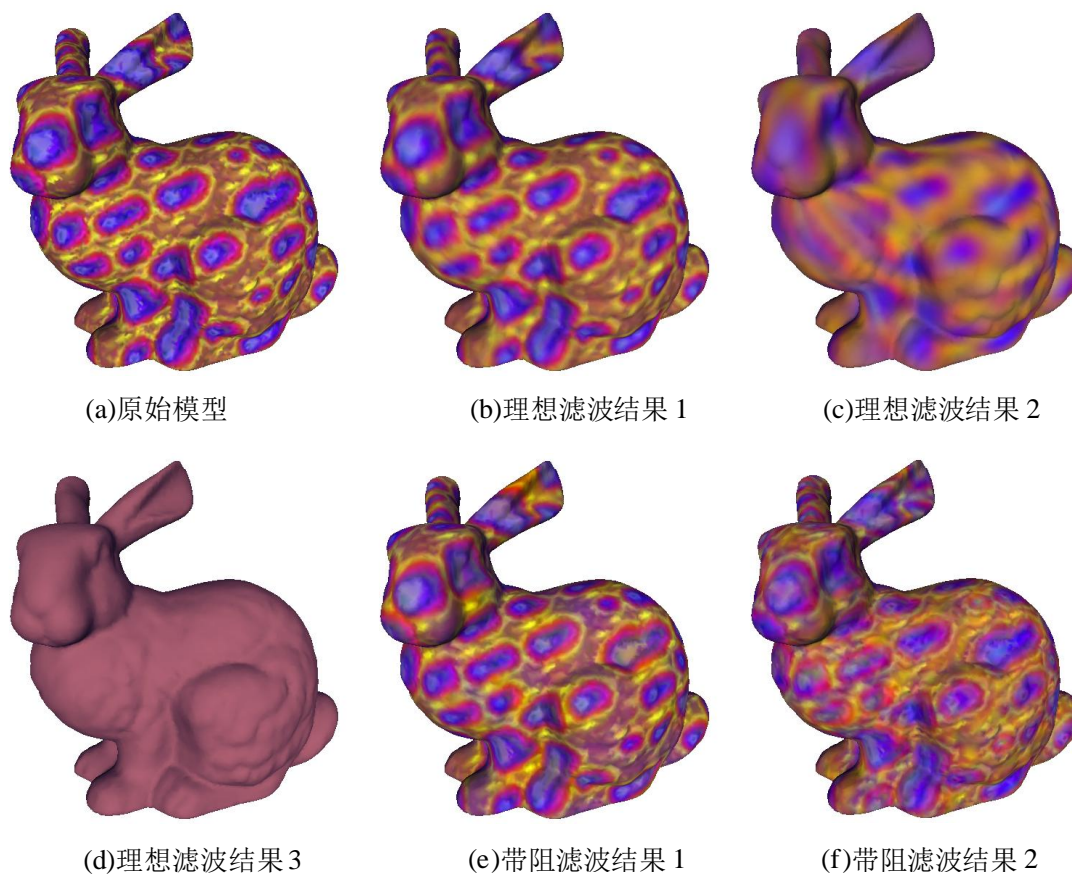


图 5.8 Bunny 模型的颜色信号滤波结果

5.1.2 卷积滤波

尽管卷积是很多信号处理应用(如去卷积、去噪声和特征增强)的关键操作, 目前还没有算法显示定义并实现了几何信号的卷积操作。而在本文 DGP 框架下, 卷积在单位球面上有精确的定义和快速计算方法。

在数学上, 两个球面信号 $F, H \in L^2(S^2)$ 的卷积定义为:

$$F * H(w) = \int_{g \in SO(3)} F(g\eta)H(g^{-1}w)dg$$

类似于经典 Fourier 变换和卷级的关系，球面调和变换和球面卷积有下面的关系：

$$f * h(l, m) = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} f(l, m) h(l, 0)$$

其中 $f(l, m)$ 和 $h(l, m)$ 分别为 F 和 H 的球面调和变换。这样，借助于快速球面调和变换和快速球面调和逆变换就可以得到带宽有限信号的快速卷积计算方法。对细节感兴趣的读者可以参考文献 [Driscoll1994]。

根据不同应用的需要设计卷积核是信号处理理论的重要研究内容，本文不对这一方向进行深入讨论。这里给出最简单的 Gaussian 卷积核的例子。我们把球面上的 Gaussian 函数定义如下：

$$G(\theta, \phi) = e^{-\theta^2 / 2\sigma^2}$$

其中 σ 被称为标准偏差， σ 和 θ 都是以角度为单位。

图 5.9 给出了对 Bunny 模型做 Gaussian 卷积滤波的结果，从左到右 $\sigma=5, 10, 80$ 。图 5.10 是对 Mannequin 进行卷积滤波的结果。

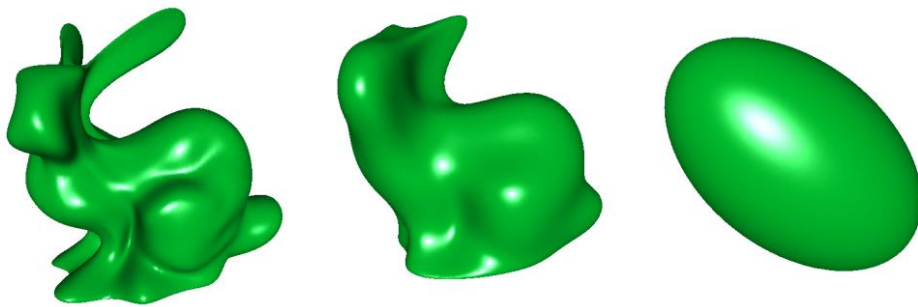


图 5.9 Bunny 模型 Gaussian 卷积滤波

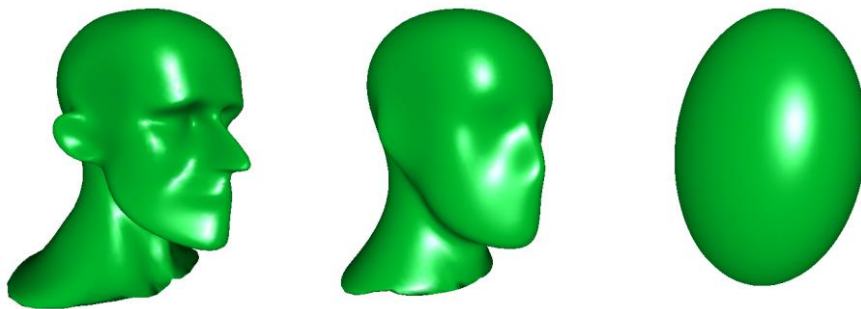


图 5.10 Mannequin 模型 Gaussian 卷积滤波

5.1.3 信号增强

信号增强是滤波的特例，例如图像处理中就有用来增强边缘的滤波器。这里我们采用频域滤波的方法来对几何信号的任意频段进行增强，可以生成很多有意思的结果。比如可以增强模型的局部细节（高频），或者模型的某些整体形状（低频）。

最简单的，函数 $g(l, m)$ 设置如下：

$$g(l, m) = \begin{cases} \mu & \text{如果 } K_a < \sqrt{l^2 + m^2} < K_b \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

其中 μ 为信号增强的倍数。当然也可以设计类似于梯形滤波器的增强函数。

图 5.11 给出了对 VenusHead 模型的顶点位置坐标进行增强的结果，其中 μ 都设为 2，从左到右 (K_a, K_b) 分别设置为 (8,16)、(16,32) 和 (32,256)，表示对不同的频率段增强的结果。图 5.12 给出了对 Bunny 模型的顶点位置坐标增强的结果，参数和 VenusHead 一样。图 5.13 是对 Bunny 模型的颜色信号进行增强的结果，从左到右 (K_a, K_b) 分别设置为 (2,16)、(16,32) 和 (32,256)。注意这种颜色增强的效果和图像中的增强效果有一定的相似性，这种方法能在一定程度改善表面纹理合成中颜色模糊的问题 [Wei2001, Turk2001]。图 5.14 是对 Planck 模型的法向量进行增强的效果，从左到右 (K_a, K_b) 分别设置为 (1,16)、(16,32) 和 (32,256)。

5.2 细节与纹理传输

由于球面参数化能把各种不同的网格模型映射到统一的单位球面上，所有的几何信号都共享同一个参数域，在多个模型之间传输属性就变得很容易。当然，不同模型的球面参数化网格还要根据一些用户指定的特征进行对齐(5.4.1 小节会介绍特征对齐算法)，这样才能保证属性传输到合适的位置。

模型的表面细节对应于高频分量。因此，把一个模型 A 的细节传输到另一个模型 B 可以通过对 A 的信号频谱进行高通滤波后加到 B 的信号频谱上得到一个新信号频谱，最后从该频谱中重建模型。最简单高通滤波器可以设计如下：

$$g(l, m) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } \sqrt{l^2 + m^2} < K_h \\ 1 & \text{否则} \end{cases}$$

设模型 A 和模型 B 的信号频谱分别为 $f_A(l, m)$ 和 $f_B(l, m)$ ，则把 A 的频率大于 K_h 的高频细节传输到模型 B 可以计算如下：

$$f'_B(l, m) = f_B(l, m) + g(l, m)f_A(l, m)$$

从 $f'_B(l, m)$ 就可以重构出相应的模型。

事实上，我们还可以把多个模型的细节或者形状传输到另外一个模型：

$$f'_B(l, m) = f_B(l, m) + g_1(l, m)f_1(l, m) + \dots + g_n(l, m)f_n(l, m)$$

图 5.15 给出了 VenusHead 模型的表面细节和一个人头模型的纹理传输到 Mannequin 模型的结果，5.15(a)是移去细节的 VenusHead 模型，5.15(b)是加上细节的 Mannequin 模型，图 5.15(c)是原始带纹理的人头模型，图 5.15(d)是纹理传输得到的 Mannequin 模型。



图 5.11 Venushead 模型的位置坐标增强



图 5.12 Bunny 模型的位置坐标信号增强

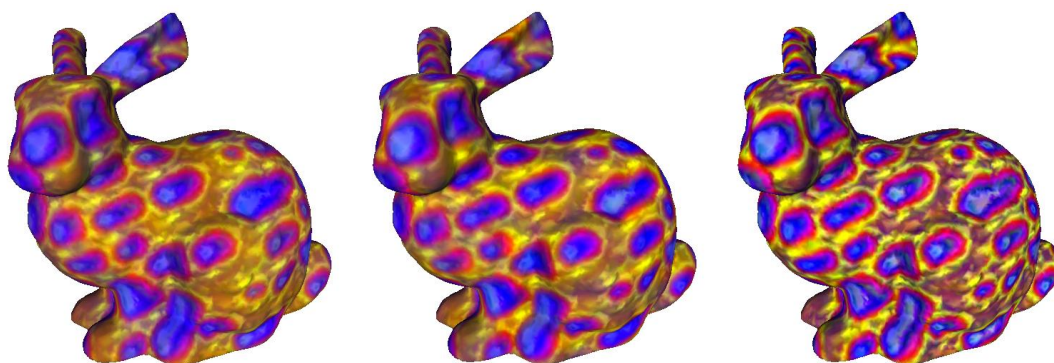


图 5.13 Bunny 模型的颜色信号增强

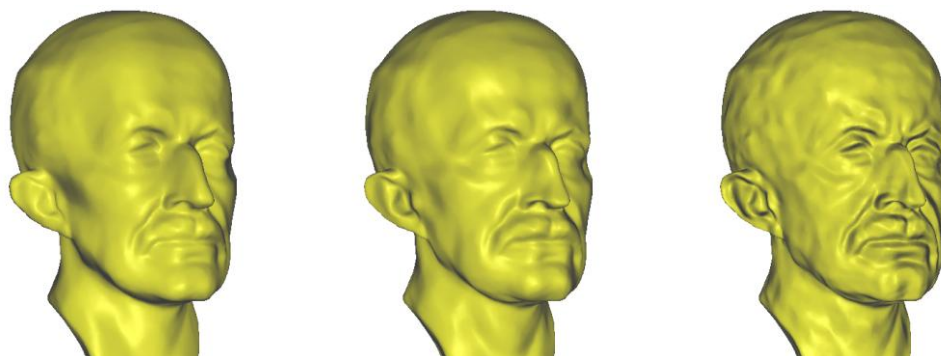


图 5.14 Planck 模型的法向量增强

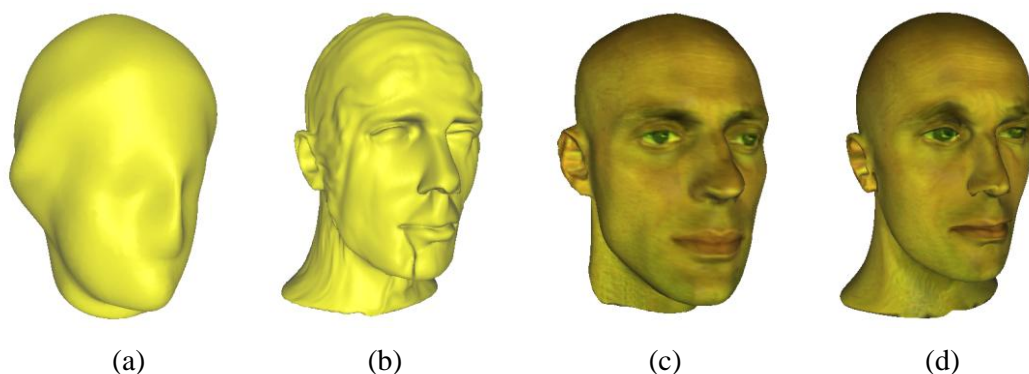


图 5.15 细节和纹理传输

5.3 多分辨率几何信号编辑

很多几何造型软件都提供对网格模型进行编辑的功能，例如把图 5.16(a)所示的模型编辑成图 5.16(d)所示的模型。由于原模型可能包含成千上万的顶点（如图 5.16 中的 Cat 模型包含 5000 左右的顶点），直接在原模型上进行编辑操作需要移动成百上千的顶点；而且为了保证编辑后模型的光滑性，移动这些顶点的时候必须特别小心。因此，直接在原始模型上进行编辑是非常耗时耗力的方法。为了解决这个问题，人们提出了一些多分辨率编辑算法。

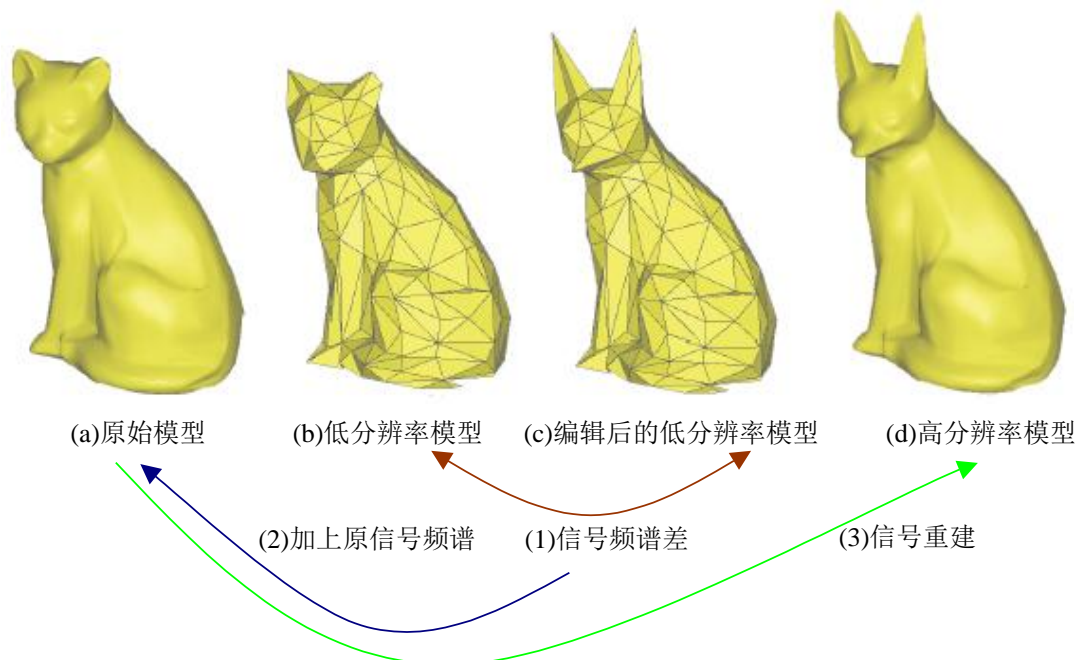


图 5.16 多分辨率信号编辑

多分辨率编辑的基本思想是先为原始模型生成一个低分辨率的模型（如图 5.16(b)），对这个低分辨率模型进行编辑（如图 5.16(c)），然后采用某种自动的方法从编辑后的低

分辨率模型生成相应的高分辨率模型（图 5.16(d)）。由于低分辨率模型的顶点数目较少，编辑操作可以很方便地完成（例如从图 5.16(b)编辑生成图 5.16(c)只需要移动 4 个顶点）。为原始模型生成低分辨率模型可以采用比较成熟的网格简化算法。因此，多分辨率编辑技术的主要难点是如何自动地从编辑后的低分辨率模型生成相应的光滑的高分辨率模型。

在第一章绪论中介绍现有的 DGP 算法时，我们已经提到了现有的几种多分辨率编辑算法 [Zorin1997, Kobbelt1998, Guskov1999]。尽管这些方法的实现技术不相同，如 [Zorin1997] 是基于子分曲面，[Kobbelt1998] 基于多分辨率网格光顺和网格简化，[Guskov1999] 基于非均匀松弛算子和网格简化，它们在从低分辨率模型恢复高分辨率模型时都通过用局部坐标系下相邻分辨率模型间的细节差，这种细节差是在从原始模型生成低分辨率模型的过程中计算并且存储起来的。

在本文 DGP 框架下，多分辨率编辑充分利用了信号在空间域和频率域之间自由切换的功能，编辑操作在空间域中进行，计算在频率域中进行，最后的结果又回到空域。而且由于我们的 DGP 框架能处理各种信号，本文的多分辨率编辑算法还可以对颜色和法向量进行编辑，因此被称为多分辨率几何信号编辑。

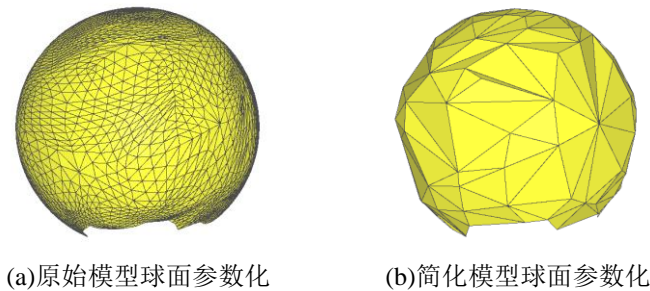


图 5.17 Cat 模型的球面参数化

5.3.1 算法描述

设输入网格模型为 M （图 5.16(a)），首先为它构造球面参数化网格 S （图 5.17(a)），并计算几何信号的频谱 $f_M(l, m)$ ；然后为网格 M 构造合适层次的低分辨率网格 M_i （图 5.16(b)）及其对应的球面参数化网格 S_i （图 5.17(b)），计算几何信号的频谱 $f_{M_i}(l, m)$ 。对 M_i 执行编辑操作得到 M'_i （图 5.16(c)），如果 M_i 和 M'_i 具有相同的拓扑连接，它们就对应与同一个球面参数化网格 S_i ，因此可以计算 M'_i 的几何信号频谱 $f_{M'_i}(l, m)$ ，然后我们通过下面的方法自动生成对应于 M'_i 的高分辨率模型 M' （图 5.16(d)）：

- 1) 计算频谱 $f_{M'_i}(l, m)$ 和 $f_{M_i}(l, m)$ 之间的差 $d(l, m) = f_{M'_i}(l, m) - f_{M_i}(l, m)$ 。
- 2) 把上述频谱差加入原信号频谱得到新频谱 $f_{M'}(l, m) = f_M(l, m) + d(l, m)$ 。
- 3) 从新频谱 $f_{M'}(l, m)$ 重构网格 M' 。

从上述描述可以看出,我们的多分辨率编辑算法通过把编辑操作的效果计算为频谱差避免了建立局部坐标系和计算不同分辨率层次之间的细节差。这种在频域中进行计算的方法大大简化了传统多分辨率编辑算法的复杂程度,而且运行速度很快。这种多分辨率编辑算法也很好地说明了本文 DGP 对几何信号在空间域和频率域之间自由切换的支持。

需要特别指出的是,虽然我们的累进球面参数化算法运行一遍就能为累进网格表示中的所有层次网格生成相应的球面参数化网格。例如第 i 层次网格 M_i 对应的球面参数化网格为 S_i , 由于参数化算法在运行过程中为了处理三角形翻转问题可能会移动球面网格上在前面步骤就放置好的顶点, 而且在均匀化球面参数化时也会移动球面网格的顶点; 因此, 球面参数化网格 S_i 和最后生成的 M 的球面参数化网格 S 之间可能对应得不好。例如球面参数化网格 5.17(a) 对应猫头的区域和图 5.17(b) 对应猫头的区域就可能会错位。因此, 我们不能为低分辨率模型采用在累进球面参数化算法中生成的参数化网格。我们的方法是从 M 及其球面参数化网格 S 出发, 进行半边折叠网格简化来生成低分辨率模型及其球面参数化网格。在进行半边折叠过程中必须保证球面网格的正确性。

5.3.2 算法实现

我们已经在微机上实现了上述多分辨率编辑算法, 该系统能对包括顶点位置、颜色和法向量在内的各种属性进行多分辨率编辑。系统支持的编辑操作有平移、缩放和旋转等。为了支持实时交互式编辑, 系统中必须预计算和存贮采样和重建过程中需要的插值参数, 球面参数化也必须预计算。

图 5.18 给出了对 Cat 模型进行各种编辑操作的结果, (a) 是通过平移和旋转操作得到的, (b) 是通过放缩操作得到的。图 5.19 给出了对 Planck 模型编辑的结果。

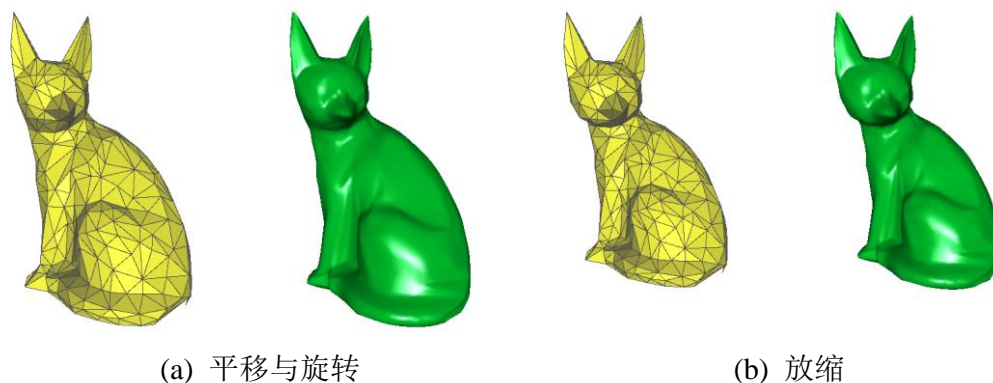


图 5.18 Cat 模型的多分辨率编辑结果

5.4 可调度的 Fourier 网格变形

网格变形 (Mesh Morphing) 是指将一个网格模型连续、光滑地变为另一个网格模

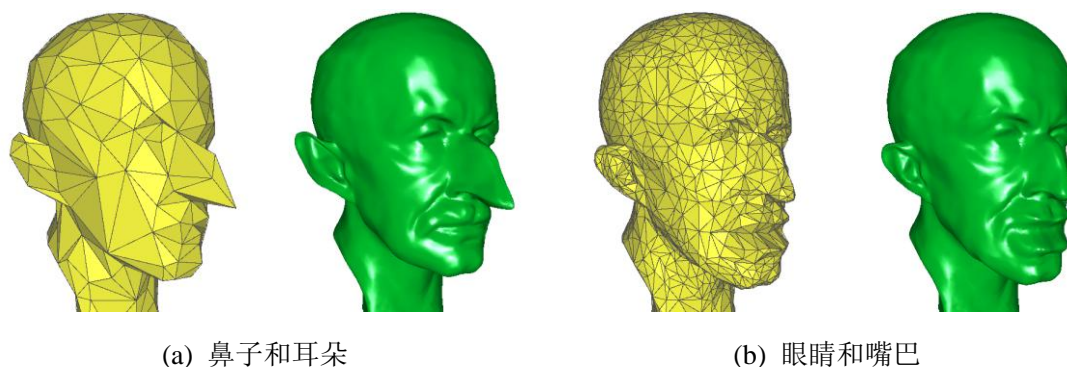


图 5.19 Planck 模型的多分辨率编辑结果

型的过程，中间生成的模型同时具有源模型和目标模型的特征。因为可以利用网格变形生成逼真和生动的动画效果，这种技术在影视特技、广告行业得到广泛的应用。

一般来说网格变形算法分由三步组成：

- 1) 建立源物体表面上点和目标物体表上点的对应关系，这被称为对应问题。特别重要的是这种对应必须确保两个模型上用户指定或自动检测的特征的对齐。
- 2) 为所有模型生成一致的拓扑连接。
- 3) 确定顶点插值路径。

上述三步中，对应问题是最难的。尽管很多学者提出了很多算法来试图解决这个问题，目前还没有一个通用的方法。这些方法的共同之处是为参与变形的所有模型找到一个公共的参数域，通过把这些模型映射到这个公共的参数域来建立它们之间的对应。网格变形算法常用的参数域有球面和基网格。除了 Kent 等人把两个星形多面体投影到单位球面上来建立对应外 [Kent1992]，还有 [Alexa2000a, Isenburg2001, Shaprio1998] 给出了球面参数化方法。在为模型构造球面参数化之后，必须重新分布球面参数化网格的顶点来对齐用户指定的特征。现有的以球面为参数域的变形算法只能处理亏格为零的模型。以基网格作为参数域的算法通常要把网格模型分成若干片，在分片过程中往往考虑了用户指定的特征。Kanai 等人把整个模型分成单独的一片 [Kanai1997, Kanai1998]，这种方法只能处理亏格为零的网格。第一章介绍过的 [Eck1995, Lee1998] 是比较好的自动分片算法。Lee 等人采用 MAPS [Lee1998] 方法先为每个模型单独构造基网格上的参数化，然后把不同的基网格合并成一个共同的基网格 [Lee1999]。但这种方法必须假设这些不同的基网格的形状是相似的，不能处理形状相差较远的模型。还有些学者通过用户交互来对网格模型分片 [Bao1998, Decarlo1996, Gregory1998, Kanai2000, Praun2001, Zöckler2000]。

通常有两种方法来为参与变形的模型生成一致的拓扑连接：拓扑合并和重采样。前者把所有模型的拓扑连接合并起来生成新拓扑。后者直接在参数域上重采样得到新拓扑，最常用的采样方法是子分采样 [Eck1995, Lee1998]。

顶点插指路径问题相对比较简单，最常用的有线性插值 [Kent1992, Gregory1998,

Zöckler2000], 或者在线性插值之前先做刚体变换 [Cohen1998a, Cohen1998b] 或仿射变换 [Alexa2000]。更复杂的方法是对模型的不同部分单独处理 [Lee1999]。

在体数据变形的研究中, Hughes 最先提出在 Fourier 变量域插值的算法 [Hughes1992]。这种方法对不同的频率段采用不同的插值函数, 为控制不同频率成分参与变形过程提供了一条新的思路。后来, 这种在频率域进行插值的方法被扩展到小波变换 [He1994]。因为网格模型不象体数据是 3D 空间中的规则采样, 上述频域插值的方法不能直接适用于网格变形算法。

在本文 DGP 框架下所有的几何信号都可以被分解到频率域, 因此我们提出了一种通过在频率域插值进行网格变形算法, 被称为可调度的 Fourier 网格变形。该算法具有以下优点:

- 1) 尽管以球面为参数域, 通过第二章介绍的切割方法, 该算法能处理亏格非零的模型。
- 2) 能采用多分辨率的方法来进行特征对齐, 大大提高了变形算法的效率。
- 3) 能同时方便地支持拓扑合并和重采样。
- 4) 支持频率域插值, 提供了一条控制模型的细节和整体形状参与变形过程的途径。

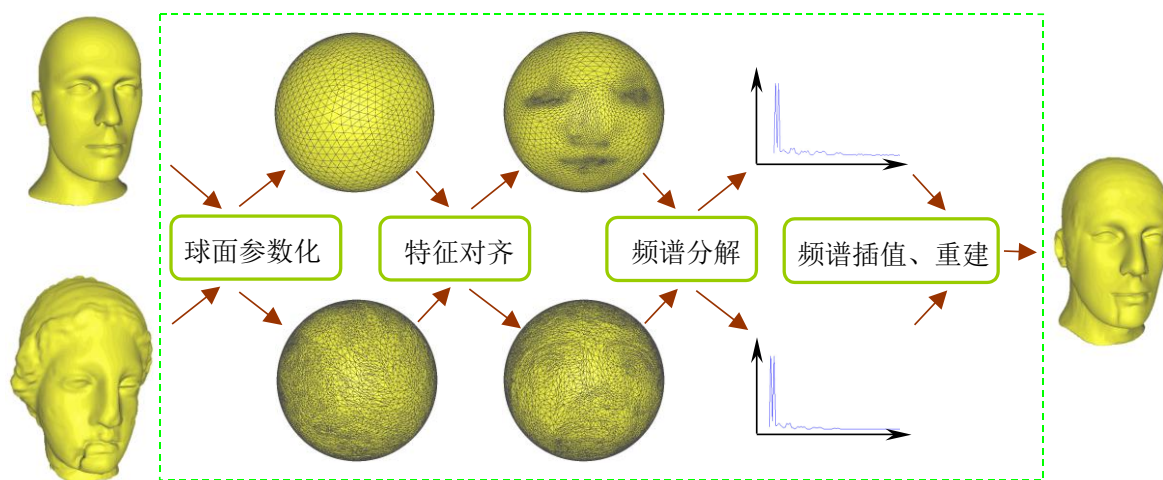


图 5.20 可调度的 Fourier 网格变形算法

图 5.20 给出了该算法的流程。在详细介绍流程中的几个关键步骤之前, 我们先引入一些标志符号:

下划线, 上划线分别表示同属于两个模型的成员。

$\underline{M}, \overline{M}$: 原始网格模型。

$\underline{V}, \underline{E}, \underline{F}, \overline{V}, \overline{E}, \overline{F}$: 顶点、边、面集合。

$\underline{S}, \overline{S}$: $\underline{M}, \overline{M}$ 的球面参数化网格。

$(\underline{V})_s, (\overline{V})_s$: $\underline{S}, \overline{S}$ 的顶点集合。

$\underline{S}', \overline{S}'$: $\underline{S}, \overline{S}$ 经特征对齐以后生成的球面参数化网格。

$\underline{M}^*, \overline{M}^*$: 完成拓扑合并以后得到的具有相同拓扑的模型。

小写字母来表示特定的拓扑元素, 如 e 表示 E 的某一条边。

5.4.1 特征对齐

网格变形算法通常需要由用户来指定模型之间的匹配特征。例如图 5.20 中 Mannequin 模型和 VenusHead 模型, 我们希望模型 Mannequin 的眼部区域在变形过程中能够对应于到 VenusHead 的眼部区域, 这就需要在 Mannequin 的眼部和 VenusHead 眼部指定特征点对。特征指定的过程与用户期望的在视觉效果上产生的渐变过程相关, 而这些特征在几何意义上没有必然的联系。

我们用特征点对来描述模型之间的特征对应, 并开发了相应的功能接口, 方便用户指定任意多对模型之间的相关特征。一旦完成人工介入的特征点选定过程, 就得到了特征点对的位置和相关信息。这些特征点的信息都存放在两个特征点集 $\underline{Feature}, \overline{Feature}$ 中。特征对齐算法描述如下:

Step 1: 转动其中一个模型的球面映射, 最小化下面的目标函数:

$$S_d = \sum_i \left\| \underline{v}_i - \overline{v}_i \right\|^2, \text{ 其中 } \overline{i} \in \overline{Feature}_i, \underline{i} \in \underline{Feature}_i。$$

Step 2: 计算所有特征点的理想位置:

$$p_i = \text{Normalize}(\underline{v}_i + \overline{v}_i)$$

即特征点对在球面上的中点位置。Normalize 表示规一化操作。

Step 3: 计算各个特征点与其理想位置之间的位移量 t 。对第 i 个特征点, 移动其周围半径为 d 的区域内所有顶点。每个顶点的位移大小随其距离第 i 个特征点的距离增加而递减。位移公式为:

$$x' = \begin{cases} \text{Normalize}(x + t(d - \|x - v_i\|)) & \text{如果 } \|x - v_i\| < d \\ x & \text{如果 } \|x - v_i\| \geq d \end{cases}$$

Step 4: 循环执行 Step 3。直至各个特征点的最大偏移量 t 在允许偏移范围之内。

Step 5: 检测经过特征对齐的球面参数化网格是否正确 (例如有没有三角形翻转情况), 如果不正确, 则在保持特征点球面位置不动的前提下, 校正球面映射。

在调用上述特征对齐算法前, 我们在保持特征点不动的前提下通过网格简化算法生成低分辨率网格模型及其球面参数化网格; 然后对这些低分辨率网格模型的球面参数化网格调用特征对齐算法; 最后利用简化过程中记录下来的局部参数化信息, 从对齐后的

低分辨率模型的球面参数化网格恢复出高分辨率模型的球面参数化网格，显然这些球面网格也是对齐的。由于低分辨率模型的顶点数目远远小于原始网络的顶点数目，这种方法大大加速了特征对齐过程。

事实上，上述特征对齐算法不仅用在网格变形算法，还适用于所有涉及到多个模型的 DGP 应用，例如 5.2 节中的细节和纹理传输。

5.4.2 拓扑合并

拓扑合并的目的为参与变形的所有模型生成一致的拓扑连接。一般来说，合并两个球面网络的拓扑连接要比合并一般网格模型的拓扑连接容易得多。与 [Alexa2000] 相似，我们的拓扑合并算法也分为两步：求交和三角化。

求交过程的目标是求得每个模型每条边上的按一定顺序排列的交点。三角化就是把两个模型交叠生成的多边形三角化，这个过程比较简单，这里就不描述，有兴趣的读者可以参考文献 [鲍 2000, Alexa2000]。下面给出一个通过广度遍历模型的拓扑连接构成的图的求交算法，其伪代码如下：

选择模型 \underline{M} 的第一个顶点 \underline{v} ；

找到包含 \underline{v} 的面 \overline{f} ，并将该面压入堆栈；

找到所有以 \underline{v} 为顶点的边，将其压入堆栈，标识该边已被访问过；

while (堆栈非空)

 取出堆栈栈顶元素： \underline{e} 为栈顶的一条边； $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ 为的 \underline{e} 两个顶点； \overline{f} 为在模型 \overline{M} 上包含 \underline{v}_1 的面；

 将 \overline{f} 的所有边加入到候选列表中；

 while (候选列表非空)

\overline{e} 为候选列表中的下一条边；

 求 \underline{e} 与 \overline{e} 之交点；

 if (有交点)

 记录交点信息：该交点是有哪两条边相交而成，以及相对于每条边的参数值；

 将 \overline{e} 中的相邻面中的另一个面赋值给 \overline{f} ；

 将 \overline{f} 中除 \overline{e} 之外的两条边，压入候选列表中；

 end if

 end while

\overline{f} 为包含 \underline{v}_2 点的模型上的面，将 \overline{f} 与以 \underline{v}_2 为起点的边压入堆栈；

 对边置已访问标识；

end while

// 利用模型 \underline{M} 的拓扑信息，完成对模型 \underline{M} 上的各条边的交点排序；

for (\overline{M} 上的每一条边 \overline{e})

$\overline{v}_1, \overline{v}_2$ 是边 \overline{e} 的两个端点，求出 $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ 在 \underline{M} 上的所在面；

利用 \underline{M} 的拓扑信息对 \bar{e} 上的各交点进行排序;
end for

事实上, 我们的网格变形算法并不一定要进行拓扑求交, 另一个选择就是重采样。而且在球面上进行重采样是很方便的操作。

5.4.3 频谱插值

现有的网格变形算法在确定顶点路径时都是在空间域内进行插值, 在本文 DGP 框架下, 通过在频率域内进行插值来控制顶点路径成为可能, 这也是本章网格变形算法的最大创新。

与 [Hughes1992] 用在频率域内插值的体数据变形算法类似, 我们也可以设计一个和频段相关的插值函数。设 M_0 和 M_1 分别为源模型和目标模型, 其频谱分别为 $f_0(l, m)$ 和 $f_1(l, m)$, $0 \leq t \leq 1$ 为变形程度, 则我们希望构造插值函数 $S_0(l, m, t)$ 和 $S_1(l, m, t) = 1 - S_0(l, m, t)$, 对应域变形程度 t 的中间模型的频谱 $f_t(l, m)$ 为:

$$f_t(l, m) = S_0(l, m, t)f_0(l, m) + S_1(l, m, t)f_1(l, m)$$

最简单的插值函数为:

$$S_0(l, m, t) = 1 - t$$

$$S_1(l, m, t) = t$$

这种插值方式就等同于空间域内的线性插值。

在体数据变形中为了减少数据的噪声对变形动画效果的影响, 通常先把源数据的高频噪声逐步消除掉, 然后源数据的低频慢慢变形为目标数据的低频, 最后目标数据的高频被加回来。同样的想法也可以推广到网格数据, 为此我们设计了如下的插值函数:

$$K = \sqrt{l^2 + m^2}$$

$$a(l, m, t) = (W + \sqrt{2}(B-1))\left(\frac{1-t}{W}\right) - \frac{K}{W}$$

$$S_0(l, m, t) = \max(0, \min(a(l, m, t), 1.0))$$

$$S_1(l, m, t) = 1 - S_0(l, m, t)$$

其中参数 W 决定插值函数的形状。显然, W 较大时, 低频率成分在高频成分消失以前就开始参与插值过程, 这样模型的整体形状在表面细节消失前就开始发生变形; W 较小时, 在低频成分参与插值过程前, 大部分高频 (甚至中频) 成分就消失了, 这样模型的整体形状一直保持不变知道它的表面细节几乎消失, 然后模型的整体形状变形为目标模型的整体形状, 最后目标模型的高频才出现。

当然, 我们还可以根据应用需求设计更复杂的与频谱相关的插值函数, 这里就不详细讨论了。

5.4.4 实验结果

图 5.21 给出了 Mannequin 模型变形到 Venushead 模型的过程，我们在两个模型间指定了 18 对特征点，并且直接在空间域插值。图 5.22 和图 5.23 给出了 Cow 模型头部变形为 Feline 模型头部的过程，共指定了 27 对特征点，采用频率域插值的方法，采样率为 256×256 。图 5.22 的插值参数 W 为 2048，而图 5.23 为 64，注意到在相同的变形程度 t 下两种方法生成结果的不同。

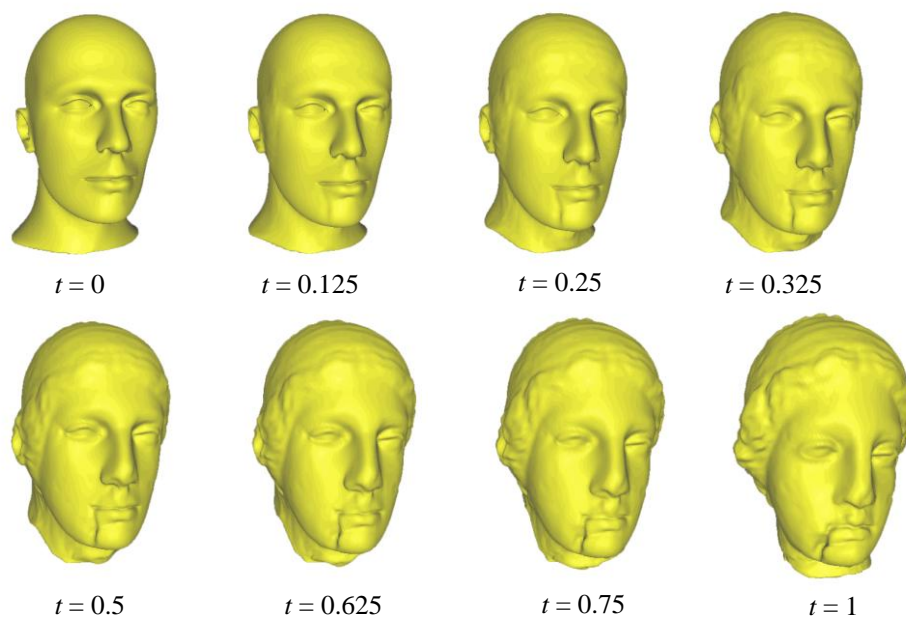


图 5.21 Mannequin 模型变形为 Venushead 模型，空间域插值。

5.5 小结

本章介绍了几个在本文 DGP 框架实现的典型 DGP 应用，包括滤波和增强、细节和纹理传输、多分辨率编辑以及可调度的 Fourier 网格变形，并给出了很多实验结果说明了算法的强壮性。特别地，本章算法具有如下优点：

- 1) 由于本文 DGP 框架能真正把几何信号变换到 Fourier 频率域，因此该框架支持各种传统的滤波器设计方法；与前人的磨光算法相比，本章的理想低通滤波器能生成更光滑的模型，并取得和图像滤波类比的效果；基于球面上函数卷积的精确定义和快速计算方法，本章第一次显示实现了对几何信号的卷积操作；基于 DGP 框架对各种几何信号的统一处理，本章还第一次给出了对颜色和法向量信号进行处理的实验结果。
- 2) 本章的信号增强算法能根据用户需要生成很多有应用价值的模型，对颜色信号的增强能较好地满足表面纹理合成算法的需要。
- 3) 在本章多分辨率编辑算法中，所有的计算都在频率域进行，而编辑操作和最后

结果都回到空间域，这充分体现了信号在空间域和频率域之间的自由切换。与前人的多分辨率算法比较，我们的算法避免了繁琐的局部坐标系和相邻分辨率模型间的细节差计算。

- 4) 通过在 **Fourier** 频率域插值，我们的网格变形算法能对不同的频率段采用不同的插值函数。另外多分辨率特征对齐方法大大提高了变形算法的效率。

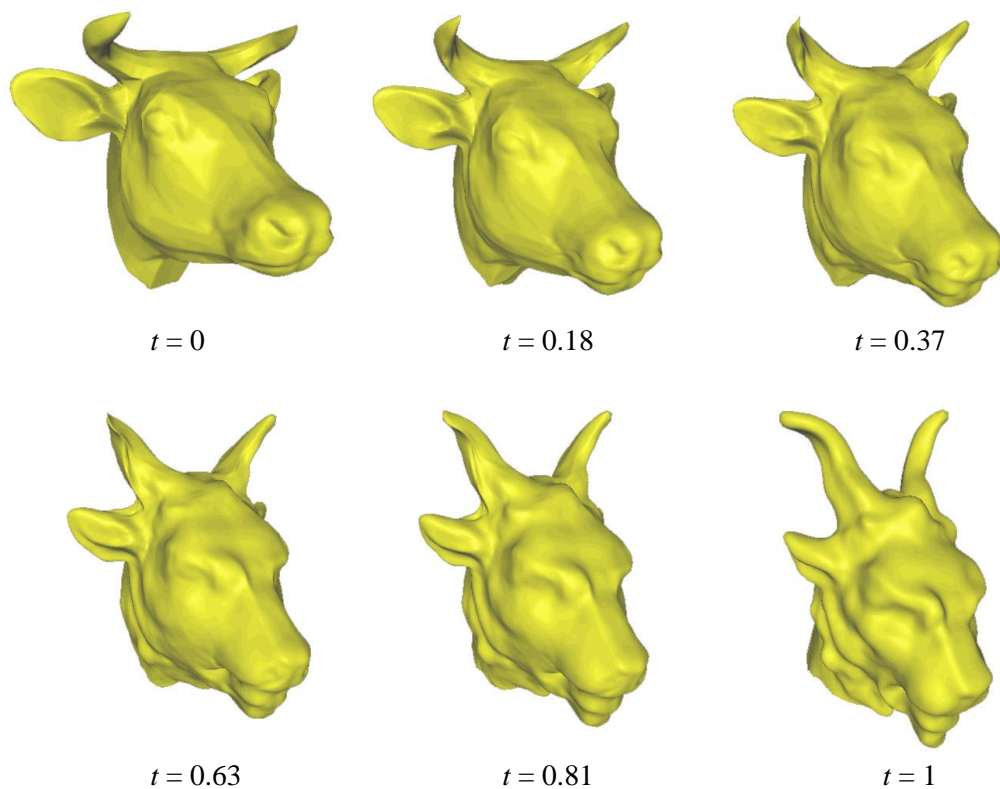


图 5.22 Cow 头部模型变形为 Feline 头部模型，频率域插值， W 为 2048。

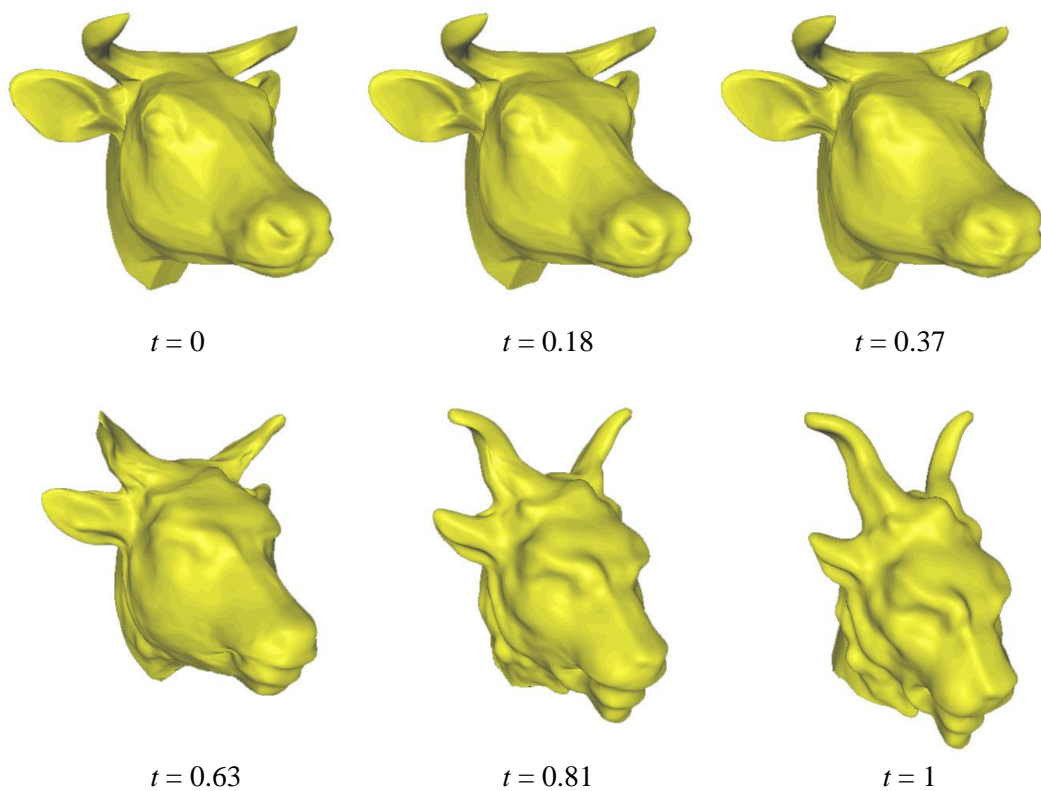


图 5.23 Cow 头部模型变形为 Feline 头部模型，频率域插值， W 为 64。

第六章 几何信号压缩

随着计算机图形学应用范围的日益扩大，人们对计算机图形的合成质量也提出了新的要求。要合成高质量的画面，往往需要足够精细的几何模型，这就导致三维场景的数据和复杂性急剧增长。三维扫描技术的发展进一步推动了这一趋势。另一方面，随着网络图形的发展，越来越多的应用需要通过网络，尤其是 Internet 存取异地服务器中的三维几何数据。这使得本已有限的网络带宽变得更为紧张。如何实时有效地处理这些日益增多的三维几何数据成为计算机图形学研究领域的一个重大问题。

研究者们提出了很多方法来解决上述问题，最为大家熟悉的技术有基于图像的建模和绘制 (Image Based Modeling and Rendering)、多细节层次 (Levels of Detail) 和几何压缩 (Geometry Compression)。其中几何压缩作为一种压缩几何数据、减少 CPU 和图形卡之间的数据传输以及降低几何数据对网络传输带宽的要求的重要技术引起了很多学者的关注。大多数现有的几何压缩算法都侧重压缩多边形网格的拓扑连接信息，而压缩网格模型属性信息 (如法向量、颜色等) 的算法则比较少。

本章介绍一种高效率的专用于压缩网格模型属性信息的算法，被称为几何信号压缩。该算法通过把任意网格参数化到平面方形区域，网格模型的所有属性都被正规采样为类似于图像的信号；然后采用图像压缩标准 JPEG2000 来压缩这些信号。需要指出的是，尽管在前面章节介绍的 DGP 框架下通过球面小波也可以得到较好的信号压缩算法，但我们的目标是尽可能采用工业界比较成熟的数据压缩标准，而选择平面参数化就可以采用标准图像压缩算法。而且本章的平面参数化算法和采样方法都可以通过对前面章节介绍的球面参数化算法和采样策略做较少的修改得到。

本章第一节简单回顾几何压缩的相关工作；第二节概述几何信号压缩框架；第三节介绍压缩框架中的一些关键技术，包括平面参数化、采样和误差度量以及 JPEG2000；第四节给出实验结果；最后是本章小结。

6.1 相关工作

1995 年，Deering 最先提出了一种几何压缩算法 [Deering1995]。该算法通过一个网格顶点缓存器来存储 16 个最近使用过的顶点数据，然后通过重用缓存器中的顶点来减少需要传输的顶点数据。此后人们提出了大量几何压缩算法，[刘 2001] 对现有算法进行了详细的分类描述。这里我们把这些算法分为两类，一类是基于顶点遍历和预测，

另一类则基于几何信号处理。

基于顶点遍历和预测的算法又分为非渐进压缩 [Alliez2001a, Bajaj1999a, Deering1995, Gumhold1998, Li1998, Rossignac1999, Taubin1998a, Touma1998] 和渐进压缩 [Alliez2001b, Bajaj1999b, Cohen1999, Hoppe1996, Taubin1998b] 两种。所谓渐进压缩就是先传输一个简化的几何模型, 然后逐渐地把几何细节传输过去, 直至整个几何模型全部传输完毕。渐进压缩方法能使接收端在数据传输过程中很快地接收到一个简单的模型, 进行显示和交互, 而不需要长久等待。此后随着细节传输的增加, 接收到的模型越来越逼近原始模型。因此渐进压缩方法特别适合于大数据量的几何模型。大部分这类算法都集中在压缩拓扑连接信息, 顶点位置和其它属性信息通过拓扑编码决定的顶点遍历顺序进行预测编码压缩。因此几何信息的编码是由拓扑连接信息的编码驱动的, 不可能达到最优。目前拓扑信息的压缩率已经达到了极限, 最好的非渐进压缩算法能达到 2-6 bits/vertex 的比特率 [Touma1998]。因此几何压缩的瓶颈集中在属性信息压缩, 特别是法向量和颜色信息的压缩。

第一章绪论中介绍现有 DGP 算法及其应用时已经提到了三种几何压缩算法 [Karni2000, Khodakovsky2000, Gu2002]。[Karni2000] 基于 [Taubin1995] 推广到三维网格的 DFT, 本质上是 Fourier 变量域上的压缩; [Khodakovsky2000] 基于子分小波, 需要对输入网格模型进行子分采样; [Gu2002] 则把任意网格参数化到平面区域, 然后采用图像压缩的小波算法。三种算法中, 只有 [Gu2002] 给出了对法向量压缩的实验结果。从压缩效果和算法实现上来说 [Gu2002] 都是目前最好的方法。

6.2 几何信号压缩框架

本章假设所处理的网格模型都和圆盘 (Disk) 同构, 这样的网格就可以被参数化到平面区域。如果网格模型不和圆盘同构, 用户需要交互地把它切割成一片或多片与圆盘同构的子网格, 每片子网格单独压缩, 在解压端再把它们合并起来。

如图 6.1 所示, 我们的几何信号压缩框架由下面几部分组成:

- 1) 平面参数化: 输入网格 M 被参数化到平面方形区域, 得到一个与 M 同构的平面网格 D , 原来定义在 M 表面上的几何信号 F_M 被转换为二维平面信号 F_D 。
- 2) 采样: 二维平面信号 F_D 被自适应采样成规则信号 F_U , 采样率由用户指定的误差精度控制。
- 3) JPEG2000 编码和解码: JPEG2000 编码器被用来压缩规则信号 F_U , 而压缩数据可以被解码成另一规则信号 F'_U 。
- 4) 几何信号重建: 通过线性插值和参数化逆映射从解压信号 F'_U 和平面参数化网格 D 中重建出新的几何信号 F'_M 。

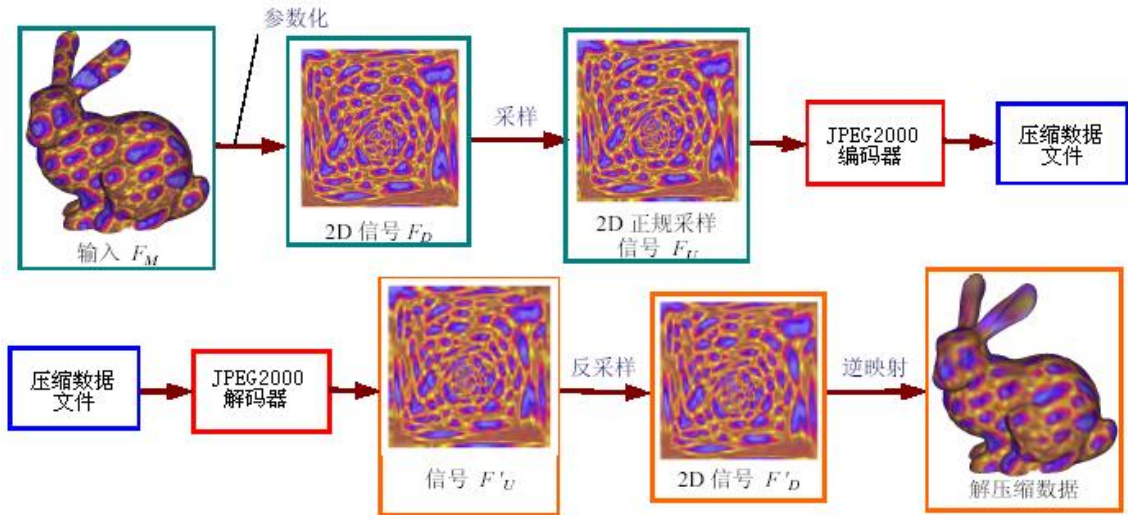


图 6.1 统一的几何信号压缩框架

事实上，本文几何信号压缩方法和 [Gu2002] 几乎是同时提出来的。[Gu2002] 的最大创新是把任意网格自动切割成单独一片，而我们的方法需要用户交互切割；当然他们的切割方法可以很方便地集成到本文算法中来。另一方面，本文算法中的累进参数化方法的效率比 [Gu2002] 的参数化方法高，而且通过自适应采样技术可以处理参数化不均匀的情况。当然这种参数化方法和自适应采样方法也可以被 [Gu2002] 采用。

另外要指出的是，上述信号压缩框架和 [Gu2002] 算法一样，如果希望重建回来的模型具有和原模型相同的拓扑连接，压缩端和解压端都必须知道参数化网格的信息。由于参数化网格是从原模型（拓扑连接和顶点位置）构造出来的，如果原模型的顶点位置数据包含在压缩数据中，这就会形成了一个循环。解决这个问题有两种方法，一种是直接把参数化网格 D 提供给解压端，即对参数化网格 D 用传统的几何压缩方法压缩；另一种方法是用传统的几何压缩方法来压缩原模型的拓扑连接和顶点位置，用上述信号压缩框架来压缩其他属性。本章采用第一种方法，采用 TG 算法 [Touma1998] 来压缩平面参数化网格 D 。

6.3 算法实现

6.3.1 累进的平面参数化算法

如图 6.2 所示，与第三章介绍的累进球面参数化算法相似，我们的累进平面参数化算法也由两步构成：

- 3) 生成带有局部参数化信息的累进网格表示。循环地执行边折叠简化操作，直到当前简化网格只包含 1 个内部顶点和 4 个边界顶点（图 6.2 中的 M_0 ），这个简化网格被称为基网格。对每次边折叠简化操作，被删除的两个顶点被分别局部参数化到该边折叠操作生成的简化网格表面上。这些局部参数化信息被记录在

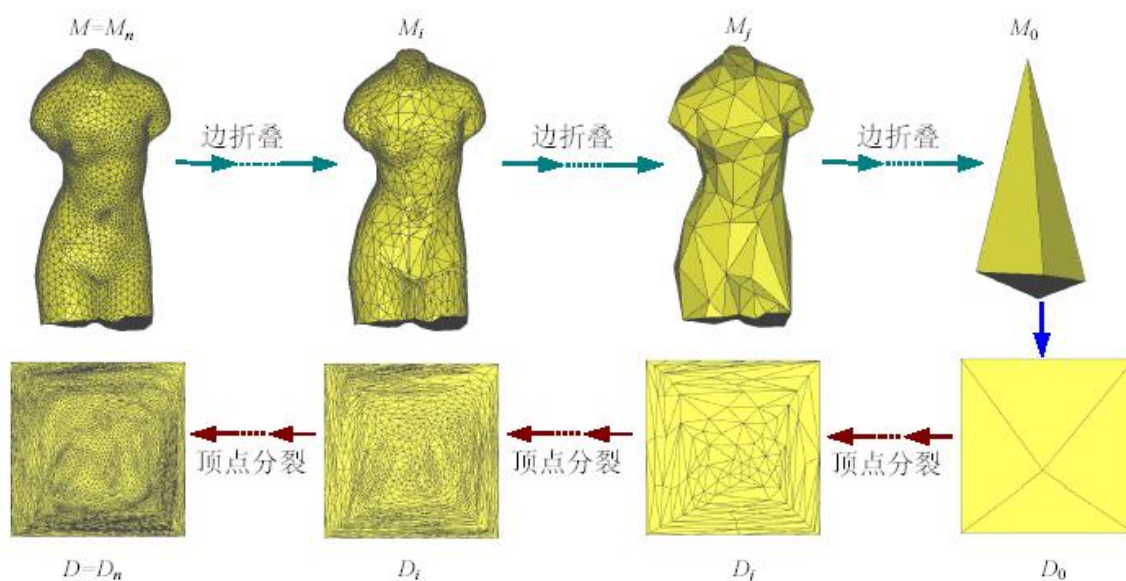


图 6.2 累进的平面参数化

累进网格表示的相应顶点分裂操作中。

- 4) 采用调和映射技术 [Eck1995] 把基网格映射到平面单位矩形区域, 得到初始平面参数化网格 D_0 。从 D_0 开始, 以逆序累进地执行记录在累进网格表示中的顶点分裂操作。对每次顶点分裂操作, 使用局部参数化信息把两个分裂出来的顶点放置在平面单位矩形区域内。当所有的顶点分裂操作执行完毕, 原始网格的平面参数化网格 D 就生成了。

这里网格简化算法和局部参数化算法都与第三章介绍的方法相同, 而且还可以采用 [Sander2001] 的方法来减小生成的平面参数化网格的伸缩变形程度。

图 6.3 给出了 Mannequin 模型的平面参数化网格。图 6.4 中的 Bunny 模型被切割成两部分, 每部分被单独参数化处理。

6.3.2 采样和误差度量

定义在平面参数化网格 D 上的几何信号 F_D 是非规则采样的, 为了能采用标准图像压缩算法来压缩 F_D , 必须把 F_D 采样一规则信号 F_U 。因此, 在满足用户指定的精度要求下, 我们需要确定最小采样率。和第二章中决定球面信号的采样率一样, 这里也采用逐步增加采样率的方法。下面我们先描述不同种类几何信号的误差度量方法, 然后介绍自适应采样方法。在同样的精度要求下, 自适应采样方法需要的采样率远小于均匀采样方法。

6.3.2.1 误差度量

误差度量对有损压缩算法来是很重要的。因为网格的属性各不相同, 有必要为不同

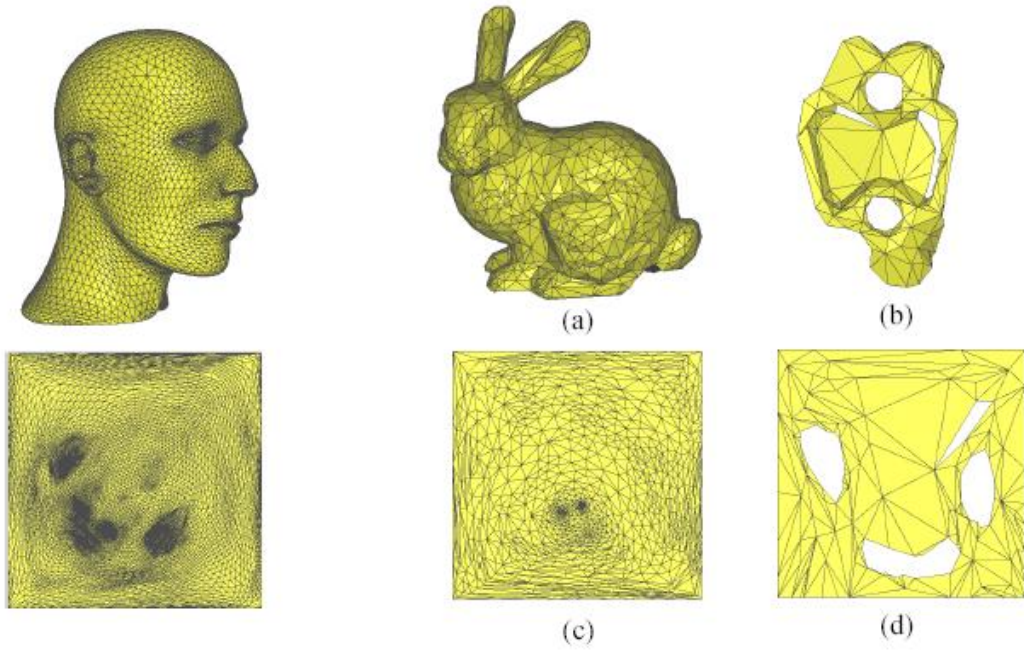


图 6.3 Mannequin 模型的平面参数化

图 6.4 Bunny 模型的平面参数化

的属性定义不同的度量标准。设 F_D 是定义在参数化网格上的信号， F'_D 是解压缩得到的信号，下面给出顶点位置坐标、颜色和法向量三种属性的误差度量方法。

对顶点位置坐标来说，METRO [Cignoni1998] 是一个比较好的工具，很多压缩算法使用它来计算误差，我们也采用这种方法。

对顶点法向量，我们采用不同法向量之间的夹角作为误差度量：

$$e(normal) = \frac{\sqrt{\sum_{i \in V_D} \arccos^2(n(i) \bullet n'(i))}}{|D|}$$

其中 $n(i)$ 和 $n'(i)$ 分别表示 F_D 和 F'_D 中第 i 个顶点的法向量值。

对 RGB 颜色属性，误差度量被定义为标准强度 $Y = 0.3R + 0.59G + 0.11B$ 的信号噪声比 PSNR：

$$PSNR = 20 \log_{10} \frac{1}{e(Y)}, \quad e(Y) = \frac{\sqrt{\sum_{i \in V_D} (Y(i) - Y'(i))^2}}{|D|}$$

其中 $Y(i)$ 和 $Y'(i)$ 分别表示 F_D 和 F'_D 中第 i 个顶点的 Y 值。

6.3.2.2 自适应采样

和一些模型的球面参数化不均匀一样，某些模型的平面参数化也很不均匀，例如图 6.4(c) 所示 Bunny 模型参数化网格在耳朵区域就很不均匀。如果采用图 6.5(a) 所示的均匀采样方法，为了满足用户给定的误差精度，可能需要很高的采样率。高采样率会带来大量的数据，从而影响压缩效率。和第四章介绍的自适应采样策略类似，我们也可以为

不均匀的平面参数化设计更好的采样策略。我们可以用图 6.5(b)所示的采样点分布来采样图 6.4(c)中参数化域上的信号。图 6.5(c)是从均匀采样数据重建出来的信号，图 6.5(d)是从自适应采样数据重建出来的信号，前者的采样率为 512×512 ，后者的采样率为 480×480 。注意到 6.4(c)中模型没有 6.5(d)精细，特别是在耳朵区域 6.5(d)包含了更多的细节。也就是说，自适应采样方法能以较小的采样率得到误差较小的信号。

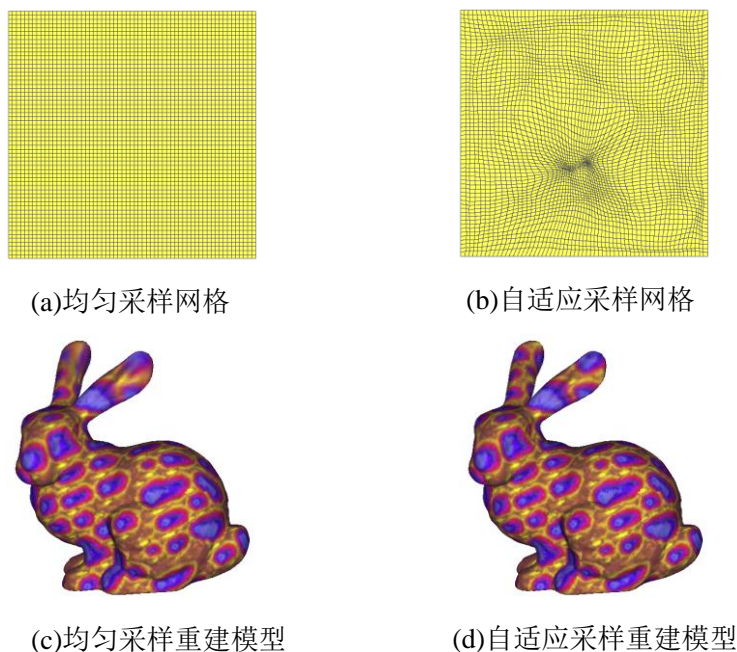


图 6.5 自适应采样策略

在给定的采样精度下，我们的自适应采样方法首先均匀等分单位矩形区域，并用这些采样点构成规则网格 U （图 6.5(a)）。然后通过下面的松弛算子重新分布网格 U 的每个顶点 $\{i\}$ 的位置 p_i ，使其顶点分布密度和参数化网格 D 相同：

$$p_i^{new} = \frac{1}{\sum_{\{j\} \in N(\{i\})} R(p_j)} \sum_{j \in N(\{i\})} R(p_j) p_j$$

其中 $R(p_j) = D'_1(p_j) / D_U(p_j)$ ， $D'_1(p_j) = D_D(p_j)$ 。一旦顶点 $\{i\}$ 的位置被更新， $D'_1(p_i)$ 和 $D_U(p_j)(j \in N(\{i\}))$ 也要做相应的更新。

当松弛过程结束，就可以通过线性插值计算出定义在网格 U （图 6.5(b)）上的信号 F_U 。尽管此时 U 中的顶点不是规则分布，但 U 的拓扑连接是规则的，因此我们可以把 F_U 当作逻辑上规则的信号，JPEG2000 就可以被用来压缩这样的信号。

6.3.3 JPEG2000 编码器和解码器

所有的图像压缩算法都可以被用来压缩规则几何信号 F_U 。因此本文的几何信号压缩框架可以很方便地集成到各种图像压缩标准中，如 JPEG，JPEG2000，MPEG2 和

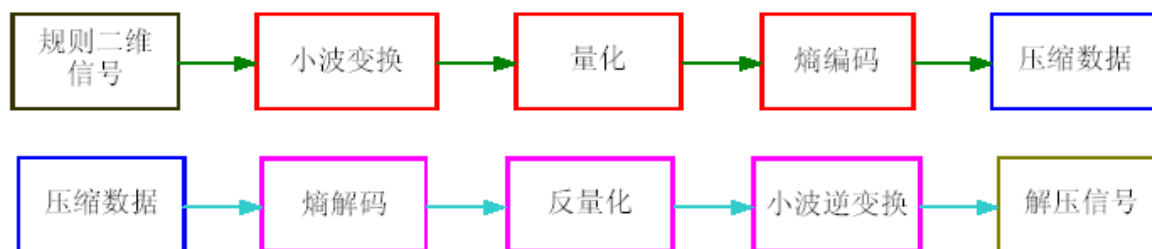


图 6.6 JPEG2000 编码和解码流程

MPEG4。在目前的实现中，我们采用 JPEG2000。

作为最新的图像压缩标准，JPEG2000 标准利用了很多新技术，能很好地满足很多尖端新兴应用的需求。其中最具有前景的应用市场包括因特网、彩色传真、遥感、汽车应用、数码图书馆和电子商务等。总的来说，JPEG2000 包括如下特性：优越的低码率性能、连续色调和二值图像的压缩、无损和有损压缩、依靠像素精度和分辨率的渐进传输、随机代码流的读取和操作、对位错误的容错性、开放的结构以及实时编码。

图 6.6 给出了 JPEG2000 的编码和解码的流程。JPEG2000 也是基于变换的编码算法，并且以图像块（Image Tiles）为工作单位。编码过程首先对图像块进行离散小波变换，变换生成的小波系数在输出成代码流之前被量化和熵编码。解码器正好与编码器相反。代码流首先被熵解码，反量化并进行离散小波逆变换，输出结果就是解压的图像数据。值得一提的是，不同于其他的编码策略，JPEG2000 既可以进行无损压缩，也可以进行有损压缩，这依赖于所用的小波转换和量化的技术。

6.4 实验结果

我们用 Visual C++ 实现了上述几何信号压缩框架，并测试了几个典型模型的不同属性。其中 Bunny、Horse 和 VenusHead 模型被切割成两部分，每部分单独处理，在解压缩端再合并起来。表 6.1 给出了实验结果的数据统计。参数化网格采用 Virtue 公司（www.virtue3d.com）的商业化软件来压缩，该软件实现了 TG 算法 [Touma1998]。因为参数坐标对压缩误差没有影响，我们采用 9-12 bits 量化。颜色信号采用 8 bits 量化（RGB 合起来就是 24 bits），其它信号采用 16 bits 量化。表中给出的位置坐标误差是相对于模型包围盒对角线的，并放大了 10000 倍。

图 6.7, 6.8, 6.9 和 6.10 分别为 Venus、Mannequin, Horse 和 Bunny 模型的顶点位置坐标信号的压缩结果。图 6.11 和 6.12 是 Bunny 模型的不同颜色属性的压缩结果。图 6.11 中的颜色模型是采用表面纹理合成算法 [Turk2001] 生成的，而图 6.12 中的模型是通过 Phong 光照模型绘制生成的。图 6.13 和 6.14 是 Bunny 和 VenusHead 模型法向量属性的压缩结果。所有图中的 (a) 是原始模型，(b) (c) (c) 对应不同比特率的压缩结果。注意到 (b) 和 (a) 看上去几乎一样，而 (c) 保留了 (a) 的大部分特征。

表 6.1 几何信号压缩数据统计

| 模型 | 顶点数目 | 属性 | 采样率 | 采样误差 | 比特率 / 误差 | | | 参数网格 | |
|---------|-------|------|------------------|-------|-------------|------------|------------|------|-------|
| | | | | | (b) | (c) | (d) | 量化 | 比特率 |
| Venus | 2793 | 位置 | 256 ² | 3.0 | 16.72/5.5 | 9.09/9.3 | 4.40/22.3 | 9 | 11.15 |
| Mann. | 6769 | 位置 | 512 ² | 2.1 | 14.74/4.0 | 7.38/7.1 | 3.63/14.4 | 10 | 9.32 |
| Horse | 20002 | 位置 | 640 ² | 1.7 | 11.26/3.6 | 4.59/7.8 | 1.74/18.7 | 10 | 17.04 |
| Bunny | 25120 | 位置 | 480 ² | 1.9 | 9.40/3.3 | 3.88/6.0 | 1.15/20.9 | 12 | 16.37 |
| | | 合成颜色 | | 73.74 | 16.11/70.33 | 5.09/60.06 | 1.24/62.67 | | |
| | | 绘制颜色 | | 89.18 | 5.28/85.77 | 1.66/80.01 | 0.32/69.88 | | |
| | | 法向量 | | 0.015 | 7.34/0.033 | 2.64/0.060 | 0.91/0.105 | | |
| VenusH. | 50000 | 法向量 | 512 ² | 0.029 | 23.42/0.054 | 7.78/0.098 | 1.47/0.219 | 12 | 14.33 |

对顶点位置坐标信号, 我们的压缩算法在比特率为 11 bits/vertex 时几乎没有视觉损失, 在 2 bits/vertex 时有较小的损失。对法向量信号, Bunny 模型的比特率要比 VenusHead 模型小得多, 这是因为 VenusHead 模型的表面细节比 Bunny 模型多。对颜色信号来说, 就象图像压缩一样, 颜色的丰富程度和在模型表面的分布情况会大大影响压缩率。这就是为什么图 6.12 中的绘制颜色的压缩率比图 6.11 中的纹理合成颜色要高得多的原因。

6.5 小结

本章描述了一种能统一处理所有网格属性的有损压缩算法。通过累进的平面参数化算法, 网格的所有属性被转换为平面参数化网格上的二维信号, 然后一种自适应采样算法把这种二维信号采样为规则信号, 最后 JPEG2000 被用来压缩这种规则信号。与传统的几何压缩算法相比, 本文算法具有如下优越性: (1) 所有网格属性的一致压缩; (2) 比特率和失真的较好折衷; (3) 容易与现有压缩标准集成。

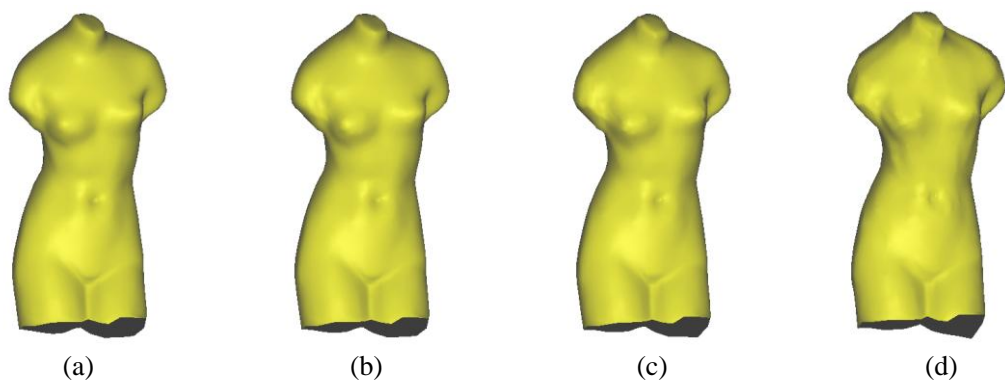


图 6.7 Venus 模型的顶点位置坐标压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 16.72, 9.09, 4.40 bits/vertex。

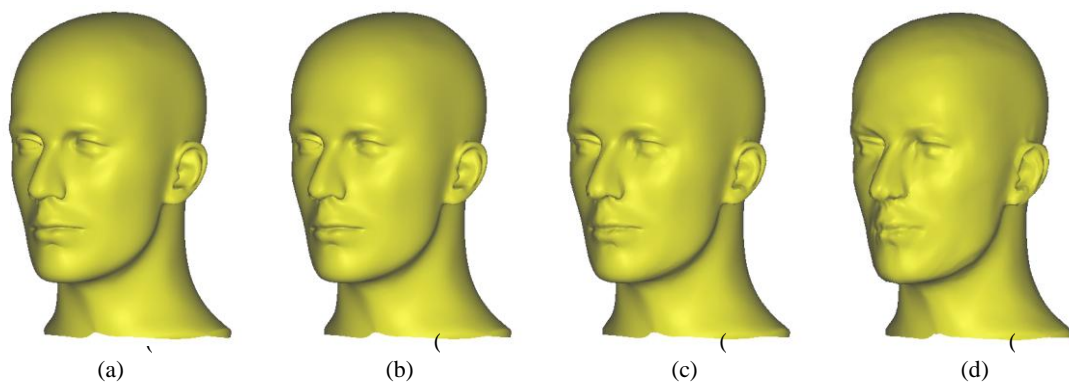


图 6.8 Mannequin 模型的顶点位置坐标压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 14.76, 7.38, 3.63 bits/vertex。

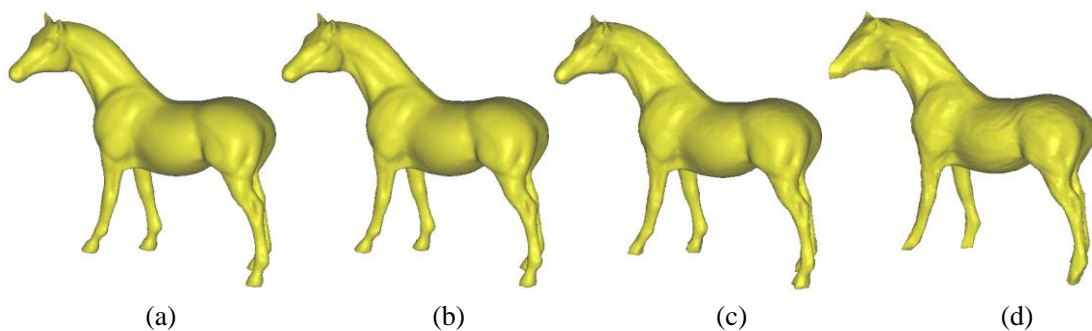


图 6.9 Horse 模型的顶点位置坐标压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 11.26, 4.59, 1.74 bits/vertex。

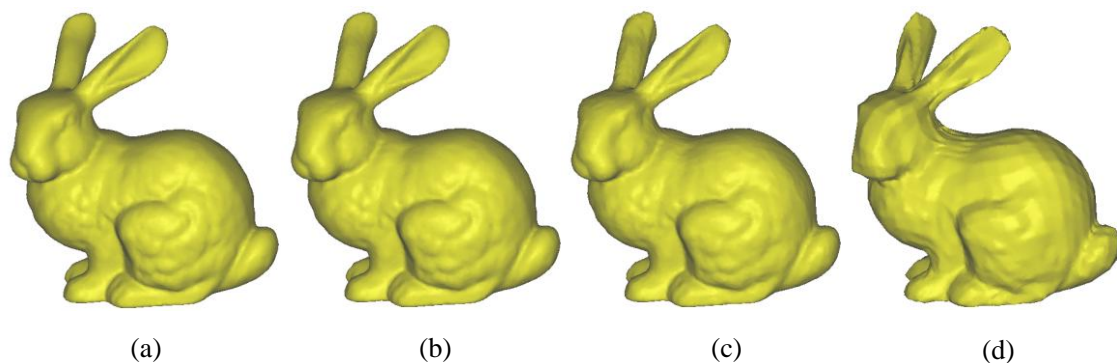


图 6.10 Bunny 模型的顶点位置坐标压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 9.40, 3.88, 1.15 bits/vertex。

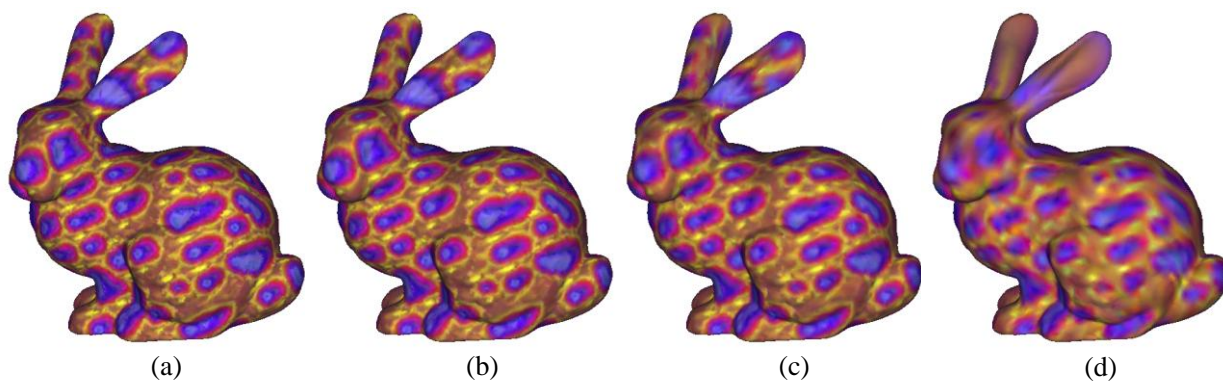


图 6.11 Bunny 模型的纹理合成颜色属性压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 16.11, 5.09, 1.24 bits/vertex。

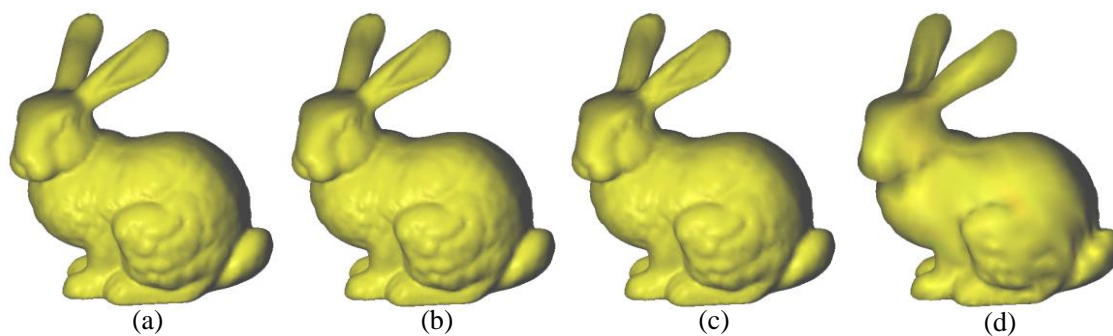


图 6.12 Bunny 模型的绘制颜色属性压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 5.28, 1.66, 0.32 bits/vertex。

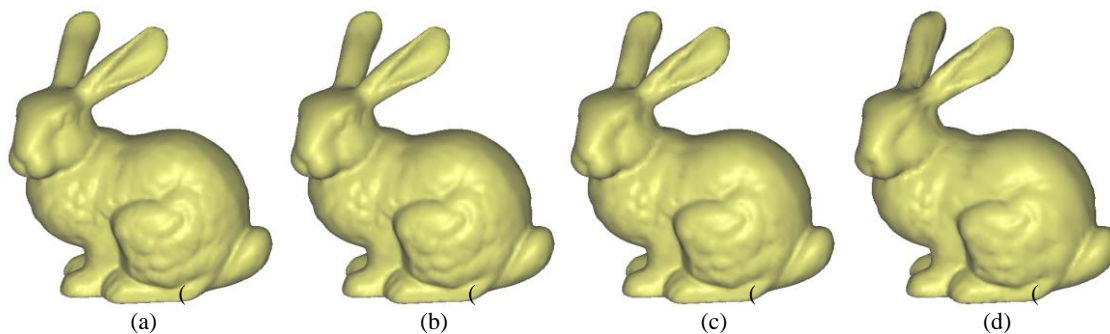


图 6.13 Bunny 模型的法向量属性压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 7.34, 2.64, 0.91 bits/vertex。

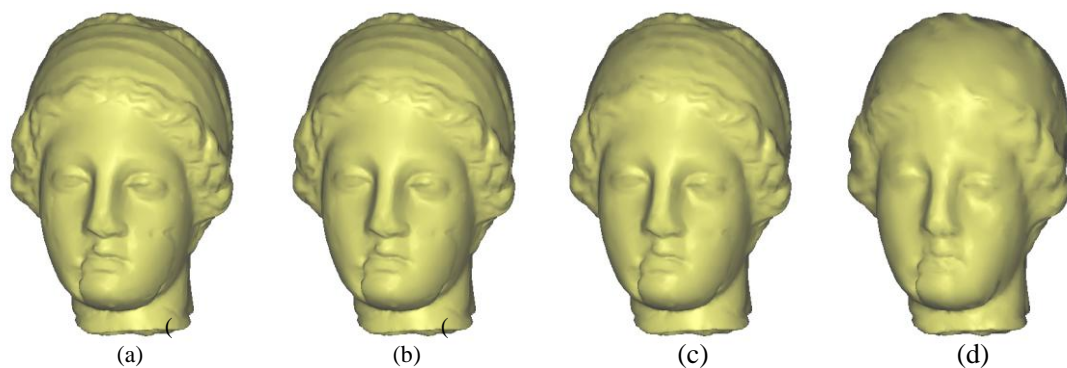


图 6.14 VenusHead 模型的法向量属性压缩。(b)(c)(d)的比特率分别为 23.42, 7.78, 1.47 bits/vertex。

第七章 结束语

综上所述，针对数字几何处理的最大难点—任意网格表面的复杂性，本文提出的统一的几何信号处理框架通过球面参数化把原来定义在任意网格表面的几何信号转换到单位球面上，这样球面上的正交分析工具（如球面调和分析和球面小波）就可以被用来分析这些几何信号。该框架不仅具有一定的理论意义和学术价值，而且能构成大多数数字几何处理应用的基础，具有广泛的应用前景。

本文框架中的两个核心技术—球面参数化算法和自适应采样方法，分别较好地解决了 DGP 中的两个关键问题—参数化和采样。通过结合累进网格技术和局部参数化技术，我们的参数化算法巧妙地把全局球面参数化问题转换为局部问题，从而能快速、稳定地为任意网格构造同构的球面网格。大量的实验结果证明我们的参数化算法是目前最快、最强壮的球面参数化算法。为了克服不均匀参数化引起的几何信号频谱能量迁移问题，我们通过引入顶点入度分布均匀的球面网格和以顶点分布密度为目标的松弛迭代算法对参数化得到球面信号进行自适应采样，从而得到具有和原信号相近频谱的球面信号。

为了说明本文 DGP 框架的通用性和实用性，本文还介绍了一些典型 DGP 应用的实现方法，包括滤波与增强、细节与纹理传输、多分辨率信号编辑、网格变形以及几何信号压缩，并给出了大量的实验结果。值得一提的是，在各种 DGP 算法中，本文首次给出了对各种几何信号（包括顶点位置坐标、颜色和法向量）进行处理的实验结果。

尽管本文给出了一个统一的 DGP 框架，DGP 还是一个新兴的研究方向，还处于百家争鸣的阶段。与数字图像处理比起来，DGP 还有很多问题有待进一步研究，还无法制订象数字图像处理那样完善的工业标准。下面从理论和应用两个方面介绍我们对本文 DGP 框架下将来研究工作的一些设想。

7.1 理论研究

不难想象，理论方面的研究主要是围绕三个方向进行：参数化、采样和新的球面信号分析工具。

均匀参数化永远是 DGP 算法追求的目标。对形状复杂的模型来说，我们现有的球面参数化算法生成的球面网格是非常不均匀的，尽管通过改进拓扑连接能得到一些改善，但这种拓扑连接改进的效果到底能达到什么程度以及如何进行高效的改进都是重要的研究方向。

我们目前的自适应采样策略是通过以顶点分布密度为目标的循环迭代来实现的，这

种方法的收敛速度很慢，通常需要循环 100 次以上。最近，[Desbrun2002] 提出了一种基于图像处理中半色调技术的几何重采样算法，能保证在给定的采样率下最精确地采样几何信号。目前我们正在考虑如何把该算法集成到本文 DGP 框架中。

第二章中已经提到了球面小波也是一种高效率的球面信号分析工具，在本文 DGP 框架下实现该分析工具也是我们目前正在进行的工作。

7.2 应用研究

在应用方面，我们的想法是尽可能地把数字图像处理中的各种应用都移植到 DGP 中。表 7.1 给出了一些典型的图像处理应用及其对应的 DGP 应用，标记*表示已经在本文 DGP 框架下实现了的应用。

表 7.1 数字几何处理应用

| 数字图像处理 | 数字几何处理 |
|---------|-----------|
| 图像滤波 | 几何信号滤波* |
| 图像压缩 | 几何信号压缩* |
| 图像变形 | 网格变形* |
| 图像纹理合成 | 三维表面纹理合成 |
| 图像水印 | 几何信号水印 |
| 图像查询、检索 | 三维数据查询、检索 |

在几何信号水印方向，我们通过把基于小波的图像水印技术推广到几何信号，已经取得了一些初步研究成果，具体可以参考文献 [周昕 2002]。对三维表面纹理合成，我们的基本想法是通过在球面上合成各种纹理生成一个球面纹理库，借助这个纹理库和任意网格模型的球面参数化技术可以快速地在三维表面合成纹理。三维数据的查询和检索涉及到一些人工智能领域的技术，目前国际上还在探索阶段。本文 DGP 框架只是提供了一条在信号频率域进行处理的途径，具体的方法还有待进一步研究。

参考文献

- [鲍2000] 鲍虎军, 金小刚, 彭群生, “计算机动画的算法基础”, 浙江大学出版社, 2000。
- [刘2001] 刘新国, 三维几何压缩, 浙江大学博士学位论文, 2001。
- [彭1999] 彭群生, 鲍虎军, 金小刚, “计算机真实感图形的算法基础”, 科学出版社, 1999。
- [Alexa2000a] Alexa, M., Merging Polyhedron Shapes with Scattered Features, *The Visual Computer*, 16(1), 26-37, 2000.
- [Alexa2000b] Alexa, M., Cohen-Or, D., Levin, D., As-rigid-as-possible Shape Interpolation, *Proceedings of SIGGRAPH 2000*, 157-164, July 2000.
- [Alexa2000c] Alexa, M., Müller, W., Representing Animations by Principal Components, *Computer Graphics Forum*, 19(3), 411-418, August 2000.
- [Alexa2001] Alexa, M., Local Control for Mesh Morphing, *Shape Modeling International '01 Proceedings*, 2001.
- [Alpert1991] Alpert, B., Rokhlin, V., A Fast Algorithm for the Evaluation of Legendre Transformations, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 12, 158-179, 1991.
- [Amenta1998] Amenta, N., Bern, M., Kamvysselis, M., A New Voronoi-Based Surface Reconstruction Algorithm, *SIGGRAPH 98 Conference Proceedings*, 415 - 421, 1998.
- [Aronov1993] Aronov, B., Seidel, R., Souvaine, D., On Compatible Triangulations of Simple Polygons, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 3, 27-35, 1993.
- [Bennis1991] Bennis, C., Vezien, J. M., Iglesias, G., Piecewise Flattening for Non-distorted Texture Mapping, *Computer Graphics*, 25(4), 237-246, 1991.
- [Bao1998] Bao, H., Peng, Q., Interactive 3d Morphing, *Computer Graphics Forum*, 17(3), 23-30, 1998.
- [Campagna1998] Campagna, S., Seidel, H. P., Parameterizing Meshes with Arbitrary Topology, In *Image and Multidimensional Digital Signal Processing*, B.G. H. Niemann, H.-P. Seidel, Ed., 287-290, 1998.
- [Castleman1999] Castleman, K.R., Digital Image Processing, *Prentice-Hall International, Inc.*, 1999.
- [Chazelle1989] Chazelle, B., Palios, L., Triangulating a Non-convex Polytope, In Kurt Mehlhorn, editor, *Proceedings of the 5th Annual Symposium on Computational Geometry (SCG '89)*, 393, Saarbrücken, FRG, June 1989.
- [Cignoni1998] Cignoni, P., Rocchini, C., Scopigno, R., Metro: Measuring Error on

- Simplified Surfaces, *Computer Graphics Forum*, 17(2), 167-174, 1998.
- [Clarenz2000] Clarenz, U., Diewald, U., Rumpf, M., Nonlinear Anisotropic Diffusion in Surface Processing, *Proceedings of IEEE Visualization 2000*, 397-405, 2000.
- [Cohen-Or 1998a] Cohen-Or, D., Carmel, E., Warp-guided Object-space Morphing, *The Visual Computer*, 13(9-10), 465-478, 1998.
- [Cohen-Or 1998b] Cohen-Or, D., Solomovici, A., Levin, D., Three-dimensional Distance Field Metamorphosis, *ACM Transactions on Graphics*, 17(2), 116-141, April 1998.
- [Cohen1996] Cohen, J., Varshney, A., Manocha, D., Turk, G., Weber, H., Agarwal, P., Brooks, F., Wright, W., Simplification Envelopes, *Computer Graphics (SIGGRAPH '96 Proceedings)*, 119-128, 1996.
- [Cohen1998] Cohen, J., Olano, M., and Manocha, D. Appearance-preserving Simplification, *Computer Graphics (SIGGRAPH '96 Proceedings)*, 115-122, 1998.
- [Curless1996] Curless, B., Levoy, M., A Volumetric Method for Building Complex Models from Range Images, *SIGGRAPH 96 Conference Proceedings*, 303 - 312, 1996.
- [DeCarlo1996] DeCarlo, D., Gallier, J., Topological Evolution of Surfaces, *Graphics Interface '96*, 194-203, May 1996.
- [Desbrun1999] Desbrun, M., Meyer, M., Schroder, P., Barr, A. H., Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow, *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings*, 317-324, 1999.
- [Desbrun2002] Desbrun, M., Meyer, M., Alliez, P., Intrinsic Parameterizations of Surface Meshes, To appear in *Eurographics'2002*, 2002.
- [Driscoll1994] Driscoll, J. R., Healy, D., Computing Fourier Transforms and Convolutions on the 2-sphere, *Advance in Application Mathematics*, 15, 202-250, 1994.
- [Eck1995] Eck, M., DeRose, T., Duchamp, T., Hoppe, H., Lounsbery, M., Stuetzle, W., Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes, *SIGGRAPH 95 Proceedings*, 173-182, 1995.
- [Finke1995] Finke, U., Hinrichs, A., Overlaying Simply Connected Planar Subdivisions in Linear Time, In *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Computational Geometry*, 119-126, New York, NY, USA, June 1995.
- [Floater1997a] Floater, M. S., Parameterization and Smooth Interpolation in Geometric Modeling. *ACM Trans. Comput. Graphics*, 8(2), 121-144, 1997.
- [Floater1997b] Floater, M. S., Parameterization and Smooth Approximation, *Computer Aided Geometric Design*, 14, 231-250, 1997.
- [Floater1999] Floater, M. S., Gotsman, C., How to Morph Tilings Injectively, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 101, 117-129, 1999.
- [Floater2001] Floater, M. S., Reimers, M., Meshless Parameterization and Surface Reconstruction, *Computer Aided Geometric Design* 18(2), 77-92, 2001.

- [Fujimura1998] Fujimura, K., Makarov, M., Folder-free Image Warping, *Graphical Models and Image Processing*, 60(2), 100–111, March 1998.
- [Garland1997] Garland, M., Heckbert, P. Surface Simplification Using Quadric Error Metric, *Computer Graphics (SIGGRAPH '97 Proceedings)*, 209-216, 1997.
- [Garland1998] Garland, M., Heckbert, P., Simplifying Surfaces with Color and Texture Using Quadric Error Metric, In *IEEE Visualization '98 Proceedings*, 263-269, 1998.
- [Golub1989] Golub, G. H., Loan, C. F. V., Matrix Computations, volume 3 of *Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, second edition, 1989.
- [Gotsman2001] Gotsman, C., Surazhsky, V., Guaranteed Intersection-free Polygon Morphing, *Computers & Graphics*, 25(1), 67–75, February 2001.
- [Gregory1998] Gregory, A., State, A., Lin, M., Manocha, D., Livingston, M., Feature-based Surface Decomposition for Correspondence and Morphing between Polyhedra, *Computer Animation '98*, Held in Philadelphia, Pennsylvania, USA, June 1998.
- [Gu2002] Gu, X. F., Gortler, S. J., Hoppe, H., Geometry Images, To appear in *Proc. SIGGRAPH'2002*, 2002.
- [Guskov1999] Guskov, I., Sweldens, W., Schroder, P., Multiresolution Signal Processing for Meshes, *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings*, 325-334, 1999.
- [Haker2000] Haker, S., Angenent, S., Tannenbaum, A., Kikinis, R., Sapiro, G., Halle, M., Conformal Surface Parameterization for Texture Mapping, *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 6(2), 2000.
- [Hamann1994] Hamann, B., A Data Reduction Scheme for Triangulated Surfaces, In *Computer Aided Geometric Design*, 11(2), 197-214, April 1994.
- [Healy1996] Healy, D. M., Rockmore, D., Kostelec, P. J., Moore, S. S. B., An FFT for the 2-sphere and Applications, *Proc. of ICASSP'96*, 3, 1323-1326, 1996.
- [Hoppe1992] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J., Stuetzle, W., Surface Reconstruction from Unorganized Points, *SIGGRAPH 92 Conference Proceedings*, 71 - 78, 1992.
- [Hoppe1993] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J., Stuetzle, W., Mesh Optimazation, *SIGGRAPH 93 Conference Proceedings*, 19 - 26, 1993.
- [Hoppe1994] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., Halstead, M., Jin, H., McDonald, J., Schweitzer, J., Stuetzle, W., Piecewise Smooth Surface Reconstruction, *SIGGRAPH 94 Conference Proceedings*, 295 - 302, 1994.
- [Hoppe1996] Hoppe, H., Progressive Meshes, *SIGGRAPH 96 Conference Proceedings*, 99-108, 1996.
- [Hoppe1999] Hoppe, H. New Quadric Metric for Simplifying Meshes with Appearance Attributes, In *IEEE Visualization '99 Proceedings*, 59-66,

- 1999.
- [Hormann1998] Hormann, K., Greiner, G., Campagna, S., Hierarchical Parameterization of Triangulated Surfaces, In *Proceedings of Vision, Modeling and Visualization*, H.-P. S. B. Girod, H. Niemann, Ed., 219-226, 1998.
- [Hormann2000] Hormann, K., Greiner, G., MIPS: An Efficient Global Parameterization Method, In *Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999*, P.-J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, Eds., Vanderbilt University Press, 219-226, 2000.
- [Isenberg2001] Isenberg, M., Gumhold, S., Gotsman, C., Connectivity Shapes, *Proceedings of IEEE Visualization*, 2001.
- [Kanai1997] Kanai, T., Suzuki, H., Kimura, F., 3d geometric Metamorphosis Based on Harmonic Map, *Pacific Graphics '97*, Held in Seoul, Korea, October 1997.
- [Kanai1998] Kanai, T., Suzuki, H., Kimura, F., Three-dimensional Geometric Metamorphosis Based on Harmonic Maps, *The Visual Computer*, 14(4), 166–176, 1998.
- [Kanai2000a] Kanai, T., Suzuki, H., Approximate Shortest Path on a Polyhedral Surface Based on Selective Refinement of the Discrete Graph and Its Applications, *Proc. Geometric Modeling and Processing 2000*, 241–250, 2000.
- [Kanai2000b] Kanai, T., Suzuki, H., Kimura, F., Metamorphosis of Arbitrary Triangular Meshes, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 20(2), 62–75, March/April 2000.
- [Karni2000] Karni, Z., Gotsman, C., Spectral Compression of Mesh Geometry, *SIGGRAPH 2000 Proceedings*, 279-286, 2000.
- [Karypis1998] Karypis, G., Kumar, V., Multilevel K-way Hypergraph Partitioning, *Technical Report*, 98–036, Department of Computer Science and Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, 1998.
- [Kent1991] Kent, J., Parent, R., Carlson, W. E., Establishing Correspondences by Topological Merging: A New Approach to 3-d Shape Transformation, *Graphics Interface '91*, 271–278, June 1991.
- [Kent1992] Kent, J. R., Carlson, W. E., Parent, R. E., Shape Transformation for Polyhedral Objects, *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 92)*, 26(2), 47–54, Held in Chicago, Illinois, July 1992.
- [Khodakovsky2000] Khodakovsky, A., Schröder, P., Sweldens, W., Progressive Geometry Compression, *SIGGRAPH 2000 Proceedings*, 271-278, 2000.
- [Klein1998] Klein, R., Multiresolution Representations for Surfaces Meshes Based on the Vertex Decimation Method, *Computers & Graphics*, 22(1), 13–26, February 1998.
- [Kobbelt1997] Kobbelt, L., Discrete Fairing, *Proceedings of the Seventh IMA Conference on the Mathematics of Surfaces*, 101-131, 1997.
- [Kobbelt1998a] Kobbelt, L., Campagna, S., Vorsatz, J., Seidel, H. P., Interactive Multiresolution Modeling on Arbitrary Meshes, *SIGGRAPH 98*

- Conference Proceedings*, 105 - 114, 1998.
- [Kobbelt1998b] Kobbelt, L., Campagna, S., Seidel, H. P., A General Framework for Mesh Decimation, *Graphics Interface '98*, 43-50, June 1998.
- [Kobbelt2000] Kobbelt, L., Sqrt(3) Subdivision, *Proceedings of SIGGRAPH 2000*, 103-112, July 2000.
- [Kobbelt2001] Kobbelt, L., Taubin, G., Geometric Signal Processing on Large Polyhedral Meshes, *Course Notes 17, SIGGRAPH 2001 Conference*, 2001.
- [Lee1998] Lee, A., Sweldens, W., Schroder, P., Cowsar, L., Dobkin, D., MAPS: Multiresolution Adaptive Parameterization of Surfaces, *SIGGRAPH 98 Conference Proceedings*, 95-104, 1998.
- [Lee1999] Lee, A., Dobkin, D., Sweldens, W., Schröder, P., Multiresolution Mesh Morphing, *Proceedings of SIGGRAPH 99*, 343-350, Held in Los Angeles, California, August 1999.
- [Lévy1998] Lévy, B., Mallet, J. L., Non-Distortion Texture Mapping for Sheared Triangulated Meshes, *Proc. of SIGGRAPH 98*, 343-352, 1998.
- [Lévy2001] Lévy, B., Constrained Texture Mapping for Polygonal Meshes, *Proc. of SIGGRAPH '2001*, 417-424, 2001.
- [Lindstrom1998] Lindstrom, P., Turk, G., Fast and Memory Efficient Polygonal Simplification, *IEEE Visualization 98 Conference Proceedings*, 279-286, October 1998.
- [Lindstrom2000a] Lindstrom, P., Out-of-core Simplification of Large Polygonal Models, *Computer Graphics (SIGGRAPH '00 Proceedings)*, 259-262, 2000.
- [Lindstrom2000b] Lindstrom, P., Turk, G., Image-driven Simplification, In *ACM Transactions on Graphics*, 19(3), 204-241, July 2000.
- [Litwinowicz1994] Litwinowicz, P., Miller, G., Efficient Technique for Interactive Texture Placement. *Proc. of SIGGRAPH '94*, 119-122, 1994.
- [Liu2001] Liu, X., Bao, H., Heng, P., Wong, T., Peng, Q., Constrained Fairing for Meshes, *Computer Graphics Forum*, 20(2), 115-124, 2001.
- [Liu2002] Liu, X., Bao, H., Shum, H., Peng, Q., A Novel Volume Constrained Smoothing Method for Meshes, To Appear in *Graphical Models*, 2002.
- [Loop1990] Loop, C., DeRose, T., Generalized B-spline Surfaces of Arbitrary Topology, *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 90)*, 24(4), 347-356, Held in Dallas, Texas, August 1990.
- [Lounsbery1997] Lounsbery, M., DeRose, T., Warren, J., Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Types, *ACM Transactions on Graphics*, 16(1), 34-73, 1997. Originally available as TR-93-10-05, 1993, Department of Computer Science and Engineering, University of Washington.
- [Low1997] Low, K. L., Tan, T. S., Model Simplification Using Vertex-clustering, In *Proceedings of 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics*, 75-82, April 1997/

- [Ma1988] Ma, S. D., Lin, H., Optimal Texture Mapping, *Proc. of Eurographics '88*, 421-428, 1988.
- [Maillot1993] Maillot, J., Yahia, H., Verroust, A., Interactive Texture Mapping, *Computer Graphics*, 27(4), 27-34, 1993.
- [Morton1992] Morton, H. P., Sequin, C. H., Functional Optimization for Fair Surface Design, *SIGGRAPH 92 Conference Proceedings*, 167-176, 1992.
- [Muller1978] Muller, D. E., Preparata, F.P., Finding the Intersection of Two Convex Polyhedral, *Theoretical Computer Science*, 7(2), 217-236, 1978.
- [Pauly2001] Pauly, M., Gross, M., Spectral Processing of Point-Sampled Geometry, *SIGGRAPH 2001 Conference Proceedings*, 379-386, 2001.
- [Pinkall1993] Pinkall, U., Polthier, K., Computing Discrete Minimal Surfaces and Their Conjugates, *Experimental Mathematics*, 2(1), 15-36, 1993.
- [Polthier2000] Polthier, K., Conjugate Harmonic Maps and Minimal Surfaces, *Technical Report Preprint No. 446*, TU Berlin, SFB 288, 2000.
- [Preparata1985] Preparata, F. P., Shamos, M. I., Computational Geometry: An Introduction, *Texts and Monographs in Computer Science*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1985.
- [Praun2000] Praun, E., Finkelstein, A., Hoppe, H., Lapped Textures, *Proc. of SIGGRAPH '2000*, 465-470, 2000.
- [Praun2001] Praun, E., Sweldens, W., Schröder, P., Consistent Mesh Parameterization, *Proc. of SIGGRAPH '2001*, 179-184, 2001.
- [Ronfard1996] Ronfard, R., Rossignac, J., Full-range Approximation of Triangulated Polyhedra, In *Computer Graphics Forum*, 15(3), 67-76, 1996.
- [Rossignac1993] Rossignac, J., Borrel, P., Multi-resolution 3D Approximation for Rendering Complex Scenes, In *Modeling in Computer Graphics*, edited by B. Falcidieno and T.L. Kunii, Springer-Verlag, 455-465, 1993.
- [Ruprecht1995] Ruprecht, D., Muller, H., Image Warping with Scattereddata Interpolation, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 15(2), 37-43, March 1995.
- [Sander2001] Sander, P. V., Synder, J., Gortler, S. J., Hoppe, H., Texture Mapping Progressive Meshes, *Proc. of SIGGRAPH '2001*, 409-416, 2001.
- [Schroeder1992] Schroeder, W. J., Zarge, J. A., Lorensen, W. E., Decimation of Triangle Meshes, *Computer Graphics (SIGGRAPH '92 Proceedings)*, 65-70, 1992.
- [Schroeder1997] Schroeder, W. J., A Topology Modifying Progressive Decimation Algorithm, *IEEE Visualization '97*, 205-212, November 1997.
- [Schröder1995] Schröder, P., Sweldens, W., Spherical Wavelets: Efficiently Representing Functions on The Sphere, *SIGGRAPH 95 Conference Proceedings*, 161-172, 1995.
- [Sederberg1993] Sederberg, T. W., Gao, P., Wang, G., Mu, H., 2d Shape Blending: An Intrinsic Solution to The Vertex Path Problem, *Proceedings of SIGGRAPH 93*, 15-18, Held in Anaheim, California, August 1993.

- [Shapira1995] Shapira, M., Rappoport, A., Shape Blending Using the Star-skeleton Representation, *IEEE Computer Graphics & Applications*, 15(2), 44–50, March 1995.
- [Shapiro1998] Shapiro, A., Ayellet, T., Polyhedron Realization for Shape Transformation, *The Visual Computer*, 14(8-9), 429-444, 1998.
- [Shoemake1992] Shoemake, K., Duff, T., Matrix Animation and Polar Decomposition, *Graphics Interface '92*, 258–264, May 1992.
- [Spanier1966] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Sun1997] Sun, Y. M., Wang, W., Chin, F. Y. L., Interpolating Polyhedral Models Using Intrinsic Shape Parameters, *The Journal of Visualization and Computer Animation*, 8(2), 81–96, April-June 1997.
- [Sweldens2001] Sweldens, W., Schröder, P., Digital Geometric Signal Processing, *Course Notes 50, SIGGRAPH 2001 Conference*, 2001.
- [Taubin1995] Taubin, G., A Signal Processing Approach to Fair Surface Design, *SIGGRAPH 95 Conference Proceedings*, 351 – 358, 1995.
- [Taubin1996] Taubin, G., Zhang, T., Golub, G., Optimal Surface Smoothing as Filter Design, *Proceedings of the 4th European Conference on Computer Vision*, Cambridge, UK, 283 – 292, 1996.
- [Turk1992] Turk, G., Re-tiling Polygonal Surfaces, *Proc. of SIGGRAPH '92*, 55-64, 1992.
- [Turk1994] Turk, G., Levoy, M., Zippered Polygon Meshes from Range Images, In *Proceedings of SIGGRAPH '94*, 311-318. ACM Press, July 1994.
- [Turk2001] Turk, G., Texture Synthesis on Surfaces, *Proc. of SIGGRAPH'2001*, 347-354, 2001.
- [Tutte1963] Tutte, W. T., How to Draw a Graph, *Proc. London Mathematical Society*, 13, 743–768, 1963.
- [Vollmer1999] Vollmer, J., Mencl, R., Muller, H., Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes, *EUROGRAPHICS 99 Conference Proceedings*, 131-138, 1999.
- [Wei2001] Wei, L. Y., Levoy, M., Texture Synthesis over Arbitrary Manifold Surfaces, *SIGGRAPH 2001 Conference Proceedings*, 355-360, 2001.
- [Welch1992] Welch, W., Witkin, A., Variational Surface Modeling, *SIGGRAPH 92 Conference Proceedings*, 157-166, 1992.
- [Welch1994] Welch, W., Witkin, A., Free-from Shape Design Using Triangulated Surfaces, *SIGGRAPH 94 Conference Proceedings*, 247-256, 1994.
- [Wolberg1998] Wolberg, G., Image Morphing: A Survey, *The Visual Computer*, 14(8-9), 360–372, 1998.
- [Zorin1997] Zorin, D., Schröder, P., Sweldens, W., Interactive Multiresolution Mesh Editing, *SIGGRAPH 97 Conference Proceedings*, 259-268, 1997.
- [Zöckler2000] Zöckler, M., Stalling, D., Hege, H., Fast and Intuitive Generation of Geometric Shape Transitions, *The Visual Computer*, 16(5), 241–253, 2000.

附录 1：演示动画文件说明

| | |
|---------------------------|--|
| 00BunnySphere.gif | Bunny 模型的球面参数化过程。 |
| 01BunnyFiltering.gif | Bunny 模型的顶点位置坐标的滤波过程。 |
| 02BunnyColorFiltering.gif | Bunny 模型的颜色属性的滤波过程。 |
| 03VenusHeadFiltering.gif | VenusHead 模型的顶点位置坐标的滤波过程。 |
| 04PlanckSmooth.gif | Planck 模型的光顺过程。 |
| 05DinoSmooth.gif | Dino 模型的光顺过程。 |
| 06FelineSmooth.gif | Feline 模型的光顺过程。 |
| 07HorseSmooth.gif | Horse 模型的光顺过程。 |
| 08BunnyConv.gif | Bunny 模型的高斯卷积滤波过程。 |
| 09CatEditing.gif | Cat 模型的多分辨率编辑过程。 |
| 10PlanckEditing.gif | Planck 模型的多分辨率编辑过程。 |
| 11MannequinMorph.gif | Mannequin 模型变形到 VenusHead 模型的过程。 |
| 12Cow2Feline1.gif | Cow 模型的头部变形到 Feline 模型的头部过程，参数 W 为 64。 |
| 13Cow2Feline2.gif | Cow 模型的头部变形到 Feline 模型的头部过程，参数 W 为 2048。 |

附录 2: 撰写论文

- 1) 周昆, 马小虎, 潘志庚, 石教英. 基于重新划分的三角形网格简化的一种改进算法. 软件学报, 1998, 9(6): 405-408.
- 2) 周昆, 潘志庚, 石教英. 基于三角形折叠的网格简化算法. 计算机学报, 1998, 9(6): 405-408.
- 3) 周昆, 潘志庚, 石教英. 调和映射的构造及其在图形学中的应用. 中国图象图形学报, 1998, 3(7): 578-582.
- 4) 周昆, 潘志庚, 石教英. 一种新的基于顶点聚类的网格简化算法. 自动化学报, 1999, 25(1): 1-8.
- 5) 张明敏, 周昆, 潘志庚, 石教英. 基于超包络的三角形网格简化算法. 软件学报, 1999, 10(6).
- 6) Zhou Kun, Zhang Mingmin, Pan Zhigeng, Shi Jiaoying. A new mesh simplification algorithm for colored or textured polygonal models. The International Journal of Virtual Reality, 2000, 4(4).
- 7) 周昆, 潘志庚, 石教英. VECW: 一个虚拟环境的构造和漫游系统. 计算机辅助设计与图形学报. 2000, 12(5).
- 8) 周昆, 潘志庚, 石教英. 多细节层次模型间的平滑过渡. 计算机辅助设计与图形学报. 2000, 12(6).
- 9) Jiang Li, Kun Zhou, Yong Wang, Heung-Yeung Shum. A Novel Image-Based Rendering System With A Longitudinally Aligned Camera Array, EuroGraphics 2000 Short Presentations, pp.107-114, Interlaken, Switzerland, 21-25 August, 2000
- 10) 周昆, 潘志庚, 石教英. 基于混合多细节层次技术的实时绘制算法. 软件学报, 2001, 12(1).
- 11) Pan Zhigeng, Zhang Mingmin, Zhou Kun, Chen Chiyi, Shi Jiaoying. Level of Detail and Multi-resolution Modeling Techniques for Virtual Prototyping. International Journal of Image and Graphics, 2001, 1(2): 329-343.
- 12) Pan Zhigeng, Zhou Kun, Shi Jiaoying. A new mesh simplification algorithm based on triangle collapses. Journal of Computer Science and Technology, 2001, 1.
- 13) 周昆, 鲍虎军, 石教英. 统一的数字几何处理框架. ChinaGraph, 2002.
- 14) Zhou Kun, Bao Hujun, Peng Qunsheng, Shi Jiaoying. Geometric Signal Compression, Submitted.
- 15) Zhou Kun, Bao Hujun, Shi Jiaoying. 3D Surface Filtering. Submitted.
- 16) Zhou Kun, Liu Min, Bao Hujun, Shi Jiaoying. Progressive Spherical Parameterization of Triangular Meshes. Submitted.

致 谢

在研究生学习阶段即将完成之际，回首近5年来学习工作中的点点滴滴，我从心里感激如此多的师长和朋友给予我的帮助。正是这几年他们在研究上的指导和合作，在生活上的关心和照顾，才使得我能顺利完成研究生阶段的学习和研究任务。

首先，我要感谢我的导师石教英教授。从1995年本科三年级开始，我就进入浙江大学CAD&CG国家重点实验室在石老师的指导下研究计算机图形学。至今，我还清晰记得石老师第一次和我谈话时就告诫我做研究要踏踏实实，在本科和研究生阶段不要追求所谓的“知识广博”，而要深而专。在后来学习和研究中，我都时常记起这番谈话，并以此鞭策和激励自己。这几年来，石老师渊博的知识和严谨的治学态度都使我受益匪浅。他对新知识的强烈兴趣和旺盛的工作热情常让我们这些年轻人钦佩不已。石老师还很注重对学生各方面能力的培养，例如放手让学生承担科研项目，送学生去国外进行合作研究等等。我很庆幸自己能成为石老师的学生。

其次，我要感谢本文的指导老师鲍虎军研究员。进入CAD&CG实验室没多久，我就听说鲍老师研究功力深厚，只是一直没有机会接受他的指导。直到2001年9月份我们的一次偶然聊天，他描述了一个球面参数化的设想，我觉得可以试一试，我们才开始合作。到后来研究取得初步成果，鲍老师又建议我把博士论文选题换成了现在的题目。可以说，本文最初就源于鲍老师的一个想法，而在后来的研究过程中，没有和鲍老师的深入讨论，本文工作也不可能取得目前的进展。鲍老师功力深厚，工作投入，每次和他讨论总能得到新的启发和收获。鲍老师真诚直爽，关怀学生，和他合作充满激情。

再次，我还要感谢潘志庚研究员。从1995年到2000年我都是在潘老师的指导下研究多细节层次技术。可以说，是潘老师带我走进了图形学算法研究领域，在研究方法，论文写作方面都是他手把手教出来的。而且本文工作中的一个核心技术，球面参数化算法的设计也得益于我在网格简化算法上的大量研究。这几年来，潘老师在各方面都很关心照顾我，他知识渊博，思路灵活，工作勤奋，一直都是我的学习榜样。

另外，我还要感谢CAD&CG实验室、微软中国研究院和德国GMD研究所为我提供了丰富的资源和优越的研究环境。感谢微软研究院沈向洋博士对我的关心和鼓励，感谢李江博士对我的指导。感谢德国GMD研究所王毅刚博士和我的讨论和帮助。

感谢所有一起学习和工作过的师兄弟和姐妹们。特别要感谢师兄林锐博士，是他教我领略到软件开发乐趣。尤其感谢刘敏博士，她参与了本文的一部分工作。感谢许威威、姜中鼎、周昕、刘新国、陈为、杨健、黄劲、赵友兵、谭家万等同学的帮助。

感谢我的父母亲、兄弟和女朋友对我的关爱和支持。

周 昆

2002年6月于求是园